FOLIA 203

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia VIII (2016)

ISSN 2080-9751

Damian Wiśniewski, Krzysztof Żyjewski

Metoda Frobeniusa, czyli o rozwiązywaniu pewnej klasy równań różniczkowych*

Abstract. The article is a comprehensive research paper which provides theoretical as well as practical aspects of the Ferdinand George Frobenius method. This method is based on seeking infinite series solutions for certain class of differential equations. It is a generalization of the power series method and allows us to solve the differential equations at least near some singular points.

1. Wprowadzenie

Ferdinand George Frobenius (1849–1917) to niemiecki matematyk współpracujący między innymi z Leopoldem Kroneckerem i Karlem Weierstrassem pod opieką, którego obronił w 1870 roku w Berlinie rozprawę doktorską. Frobenius zyskał rozgłos przede wszystkim dzięki pracom z zakresu teorii algebr, teorii grup oraz teorii liczb. Nie można jednak zapominać o zaproponowanej przez niego metodzie (Frobenius, 1873) dotyczącej poszukiwania rozwiązań dla pewnej klasy równań różniczkowych zwyczajnych.

Artykuł jest propozycją kompleksowego opracowania metody Frobeniusa zarówno od strony teoretycznej, jak i ćwiczeniowej. Motywację do napisania tej pracy stanowi fakt, że w podstawowej polskojęzycznej literaturze poświęconej równaniom różniczkowym zwyczajnym (Lenda, 2004; Lenda, Spisak, 2006; Palczewski, 2004; McQuarrie, 2005), brakuje pełnego opisu tej metody, przede wszystkim dowodu wszystkich przypadków twierdzenia Frobeniusa oraz usystematyzowania sposobów wyznaczania drugiego z rozwiązań równania $P(t)x'' + Q(t)x' + R(t)x = 0$. Artykuł skierowany jest przede wszystkim do studentów matematyki stosowanej i nauczycielskiej, jak również nauczycieli akademickich. Co więcej może stanowić inspirację do napisania pracy dyplomowej rozszerzającej nasze rozważania do przypadku równania różniczkowego n-tego rzędu (Frobenius, 1873; Ince, 1926).

*Frobenius method, or on solving a certain class of differential equations

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 97A10; 34A25 Secondary: 97B40, 97I40

Key words and phrases: Frobenius method, series solutions, differential equations

Kolejna część poświęcona jest wstępnym pojęciom takim jak *punkt regularny*, *punkt osobliwy*, *regularny punkt osobliwy*. Następnie omówimy omawiamy najprostszy przykład rozważanych równań, to znaczy *równanie Eulera*, które jednocześnie stanowi motywację stosowania metody Frobeniusa. Kolejna część zawiera rozważania na temat ogólnego równania różniczkowego drugiego rzędu z regularnymi punktami osobliwymi. Przedstawiamy tam sformułowanie oraz pełen dowód twierdzenia Frobeniusa, charakteryzującego postać rozwiązania w pobliżu regularnego punktu osobliwego. Dowód ten opiera się na pozycjach anglojęzycznych (Agarwal, O'Regan, 2009; Coddington, 1989). Poruszamy też problem regularnych punktów osobliwych na nieskończoności. W kolejnej części, który odpowiada części ćwiczeniowej, formułujemy i rozwiązujemy wybrane przykłady. Przedstawiamy również propozycje zadań do samodzielnego rozwiązania przez studentów.

2. Wiadomości wstępne

Będziemy rozważać rozwiązania jednorodnego równania różniczkowego drugiego rzędu postaci:

$$P(t)x'' + Q(t)x' + R(t)x = 0, \tag{1}$$

gdzie $P(t)$, $Q(t), R(t)$ to dane wielomiany nie posiadające wspólnych dzielników. Przedstawiona przez nas metoda może być również stosowana gdy $P(t)$, $Q(t), R(t)$ są funkcjami analitycznymi. Załóżmy, że chcemy rozwiązać równanie (1) w sąsiedztwie punktu t_0 - wówczas metoda rozwiązywania zależeć będzie od postaci $P(t)$.

Zacznijmy od definicji punktu regularnego. Punkt t_0 taki, że $P(t_0) \neq 0$ nazywamy *punktem regularnym*. Wtedy na jego otoczeniu równanie (1) możemy zapisać w postaci

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0, \tag{2}$$

gdzie funkcje $p(t) = \frac{Q(t)}{P(t)}$ oraz $q(t) = \frac{R(t)}{P(t)}$ są analityczne w t_0. Rozwiązanie równania (2) istnieje i jest jednoznaczne, o czym przekonuje nas następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 1
Niech t_0 będzie punktem regularnym równania (1), wówczas ogólne rozwiązanie tego równania ma formę

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t),$$

gdzie $x_1(t)$, $x_2(t)$ mają postać szeregów potęgowych

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^n,$$

zaś c_1 i c_2 to dowolne stałe. Ponadto promień zbieżności $x_1(t)$, $x_2(t)$ jest co najmniej równy mniejszemu z promieni zbieżności rozwinięć w szeregi potęgowe funkcji $p(t)$ i $q(t)$.

Dowód. Patrz twierdzenie 4.7 (Palczewski, 2004).

W pracy interesować nas będzie przypadek punktu *osobliwego*, to znaczy takiego, że $P(t_0) = 0$. Przykładowo, równanie różniczkowe

$$t^2(t-3)^2x'' + (t-3)x' + 2t^2x = 0 \tag{3}$$

posiada dwa punkty osobliwe: $t = 0$ i $t = 3$.

Rozwiązania równań różniczkowych posiadających punkty osobliwe w t_0 **zazwyczaj** nie są analityczne w tych punktach i w konsekwencji nie mają rozwiązań postaci

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - t_0)^n.$$

Nie możemy jednak zignorować istnienia takich punktów pomimo tego, że potrafimy wyznaczyć rozwiązanie w ich sąsiedztwie. Występowanie punktów osobliwych określa główne cechy rozwiązania i wpływa na jego postać w znacznie większym stopniu niż można by było podejrzewać. W sąsiedztwie punktu osobliwego rozwiązanie doświadcza często gwałtownych zmian wielkości, ucieka do nieskończoności albo wpada w bardzo szybkie oscylacje. Dlatego też zachowanie rozwiązań w pobliżu punktów osobliwych jest istotne zwłaszcza w przypadku układów fizycznych modelowanych przez równania różniczkowe. Geometrycznie punkty osobliwe związane są z występowaniem w zagadnieniach fizycznych, osobliwości brzegowych takich jak kąty lub ostre krawędzie. Liniowo niezależne rozwiązania x_1, x_2 równania (1) z punktami osobliwymi t_0 przy t dążącym do t_0 mogą być zarówno ograniczone, nieograniczone, jak i jedno z nich ograniczone, a drugie nie.

Celem prezentowanej metody Frobeniusa jest rozwinięcie techniki poszukiwania rozwiązań za pomocą szeregów potęgowych stosowanej dla punktów regularnych na pewną klasę punktów osobliwych. Aby to zrobić w stosunkowo prosty sposób należy ograniczyć się do przypadków tak zwanych *słabych osobliwości* dla funkcji $p(t) = \frac{Q(t)}{P(t)}$ i $q(t) = \frac{R(t)}{P(t)}$. Tak więc, żeby rozważać rozwiązania równania (1) w pobliżu punktów osobliwych będziemy wymagać spełnienia dodatkowych warunków przez funkcje $p(t)$, $q(t)$, mianowicie pewnej regularności tych punktów. Będziemy mówić, że punkt osobliwy t_0 jest *regularnym punktem osobliwym* równania (1), jeżeli granice:

$$\lim_{t \to t_0} (t - t_0) p(t) \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{t \to t_0} (t - t_0)^2 q(t) \tag{4}$$

istnieją i są właściwe. Natomiast jeżeli przynajmniej jedna z granic (4) nie istnieje lub jest niewłaściwa, to punkt t_0 nazywamy nieregularnym punktem osobliwym. Innymi słowy, punkt t_0 nazywamy regularnym punktem osobliwym, jeżeli funkcje $(t - t_0)p(t)$ oraz $(t - t_0)^2 q(t)$ są analityczne w punkcie t_0. Oznacza to również, że punkt osobliwy t_0 jest regularnym punktem osobliwym jeżeli mianownik wyrażenia $p(t)$ posiada czynnik $(t - t_0)$, w co najwyżej pierwszej potędze, a mianownik wyrażenia $q(t)$ posiada czynnik $(t - t_0)$, w co najwyżej drugiej potędze.

Wróćmy teraz do równania (3). Dzieląc je przez $t^2(t - 3)^2$ dostaniemy

$$x'' + \frac{1}{t^2(t - 3)} x' + \frac{2}{(t - 3)^2} x = 0.$$

Zauważmy teraz, że dla punktu $t_0 = 0$ nie istnieje granica

$$\lim_{t \to 0} \frac{t}{t^2(t - 3)} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t(t - 3)},$$

więc $t_0 = 0$ jest nieregularnym punktem osobliwym. Natomiast dla drugiego z punktów osobliwych mamy

$$\lim_{t\to 3} \frac{t-3}{t^2(t-3)} = \frac{1}{9}, \qquad \lim_{t\to 3} \frac{2(t-3)^2}{(t-3)^2} = 2,$$

zatem $t_0 = 3$ jest regularnym punktem osobliwym.

Celem naszego artykułu będzie rozważanie problemu rozwiązań równania różniczkowego drugiego rzędu postaci (1) w pobliżu regularnego punktu osobliwego $t = t_0$. Ponadto, bez straty ogólności będziemy zakładać, że $t_0 = 0$. Jeżeli punkt $t_0 \neq 0$ byłby regularnym punktem osobliwym równania (1), wówczas dokonując zamiany $t = \xi + t_0$, sprowadzilibyśmy je do równania z regularnym punktem osobliwym $\xi_0 = 0$.

Na podstawie definicji regularnego punktu osobliwego wiemy, że wyrażenia

$$tp(t) = t\frac{Q(t)}{P(t)} \qquad \text{oraz} \qquad t^2q(t) = t^2\frac{R(t)}{P(t)}$$

mają skończone granice przy t dążącym do 0 oraz są analityczne w punkcie $t_0 = 0$. Dzieląc równanie (1) przez $P(t)$ oraz mnożąc przez t^2, otrzymujemy

$$L[x] = t^2x'' + t\,[tp(t)]\,x' + t^2q(t)x = 0, \tag{5}$$

gdzie

$$tp(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n, \qquad t^2q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n \tag{6}$$

są zbieżne na pewnym przedziale $|t| < r_0$, z $r_0 > 0$.

Problem wyznaczania rozwiązań równania (5) omówimy w dalszej części artykułu.

3. Równanie Eulera, czyli motywacja metody Frobeniusa

Tutaj zajmiemy się rozważaniami na temat rozwiązań równania (5) w jego najprostszej postaci, gdy $tp(t) = p_0$, $t^2q(t) = q_0$, gdzie p_0, q_0 to stałe:

$$L_e[x] = t^2x'' + p_0tx' + q_0x = 0 \tag{7}$$

czyli *równaniem Eulera*. Jak łatwo zauważyć $t_0 = 0$ jest regularnym punktem osobliwym równania Eulera. Natomiast jego rozwiązania, jak się przekonamy, reprezentują typową postać rozwiązań równań z regularnymi punktami osobliwymi. Jest to bardzo ważne równanie pod względem zastosowań. Możemy otrzymać je, rozwiązując między innymi równanie Laplace'a we współrzędnych biegunowych, równanie Schrödingera, które stosowane jest między innymi do opisu atomu wodoru czy też podczas analizy potencjału pola elektrostatycznego. Równanie te pojawia się również przy modelowaniu struktury gwiazd (Rybka, 2012).
Rozważmy przykładowe równanie Eulera:

$$2t^2x'' - tx' - 2x = 0.$$

Zauważmy, że poszukując rozwiązań w postaci szeregów potęgowych

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

(zgodnej twierdzeniem 1), otrzymujemy

$$2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0.$$

Porównując współczynniki przy kolejnych potęgach zmiennej t dostaniemy $a_n = 0$ dla wszystkich $n \neq 2$, zaś a_2 jest dowolne. W ten sposób, korzystając z metody szeregów potęgowych stosowanej w przypadku punktów regularnych, znaleźliśmy tylko jedno z rozwiązań rozważanego równania: $x_1 = t^2$. Jak łatwo sprawdzić, drugim liniowo niezależnym rozwiązaniem jest funkcja $x_2 = t^{\frac{1}{2}}$. Zatem rozwiązania równań różniczkowych z regularnymi punktami osobliwymi nie muszą być analityczne w tych punktach. Widzimy więc potrzebę modyfikacji sposobu poszukiwań rozwiązań.

Załóżmy najpierw, że $t > 0$. Rozwiązania (7) będziemy poszukiwać w postaci t^λ, gdzie $\lambda = const$. Umotywowane jest to faktem, że jeżeli policzymy pochodne i wstawimy do (7) otrzymamy takie same potęgi we wszystkich składnikach (7). Wprowadzając funkcję:

$$F(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + p_0\lambda + q_0 \tag{8}$$

dostajemy

$$L_e[t^\lambda] = F(\lambda)t^\lambda = 0.$$

Zatem $x = t^\lambda$ jest rozwiązaniem (7) jeżeli λ jest pierwiastkiem równania kwadratowego $F(\lambda) = 0$. Stąd

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(p_0 - 1) \pm \sqrt{(p_0 - 1)^2 - 4q_0}}{2}.$$

Postać rozwiązania równania Eulera zależy od rodzaju pierwiastków $\lambda_{1,2}$. Jeżeli λ_1, λ_2 są różnymi liczbami rzeczywistymi, wówczas jak łatwo zauważyć $x_1 = t^{\lambda_1}$ oraz $x_2 = t^{\lambda_2}$ są dwoma liniowo niezależnymi rozwiązaniami (7). Jeżeli $\lambda_1 = \lambda_2$, wówczas tylko jedno rozwiązanie jest postaci t^λ. Drugie rozwiązanie może być wyznaczone za pomocą metody redukcji rzędu (patrz część 4.1.). Przedstawimy tutaj inne możliwe podejścia otrzymania drugiego rozwiązania. Zauważmy, że

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} L_e[t^\lambda] = L_e\left[\frac{\partial t^\lambda}{\partial\lambda}\right] = L_e[t^\lambda \ln t] = [F'(\lambda) + F(\lambda)\ln t]\, t^\lambda.$$

Stąd, ponieważ λ_1 jest dwukrotnym pierwiastkiem równania $F(\lambda) = 0$, mamy $F[t^{\lambda_1} \ln t] = 0$. Zatem $x_2 = t^{\lambda_1} \ln t$ jest drugim rozwiązaniem równania (7) w przypadku gdy $\lambda_1 = \lambda_2$.

Rozważmy teraz przypadek zespolonych pierwiastków równania $F(\lambda) = 0$. Niech $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, gdzie α, $\beta \in \mathbb{R}$ oraz $\beta \neq 0$. Używając między innymi własności

$t^\lambda = e^{\lambda \ln t}$ i wzoru Eulera $e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta$ łatwo wykazać, że z rozwiązania ogólnego postaci $x(t) = c_1 t^{\lambda_1} + c_2 t^{\lambda_2}$ dostajemy dwa liniowo niezależne rozwiązania (7):

$$x_1 = t^\alpha \cos(\beta \ln t), \qquad x_2 = t^\alpha \sin(\beta \ln t).$$

Niech teraz $t < 0$. Zastosujemy podstawienie $s = -t$, $s > 0$ oraz zdefiniujemy $u(s) = x(t) = x(-s)$. Wówczas, ponieważ

$$x'(t) = -u'(s) \qquad \text{oraz} \qquad x''(t) = u''(s)$$

z równania (7) otrzymujemy:

$$s^2 u''(s) + p_0 s u'(s) + q_0 u(s) = 0, \ \ \text{gdzie} \ \ s > 0.$$

Zatem, na bazie wcześniej uzyskanych wyników mamy, że rozwiązania dla $t < 0$ mają taką samą postać jak te otrzymane dla $t > 0$ z tym, że zastępujemy wszędzie t na $-t$.

Powyższe rozważania można podsumować następującym twierdzeniem:

Twierdzenie 2
Niech będzie dany wielomian $F(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + p_0\lambda + q_0$, gdzie p_0, q_0 to stałe rzeczywiste. Wówczas, jeżeli pierwiastki λ_1, λ_2 równania $F(\lambda) = 0$ są:

a) rzeczywiste i różne, to

$$x_1 = |t|^{\lambda_1}, \qquad\qquad x_2 = |t|^{\lambda_2};$$

b) rzeczywiste i równe, to

$$x_1 = |t|^{\lambda_1}, \qquad\qquad x_2 = |t|^{\lambda_1} \ln|t|;$$

c) zespolone : $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, gdzie α, $\beta \in \mathbb{R}$ oraz $\beta \neq 0$, to

$$x_1 = |t|^\alpha \cos(\beta \ln|t|), \qquad x_2 = |t|^\alpha \sin(\beta \ln|t|)$$

są liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania Eulera (7), na dowolnym przedziale niezawierającym zera.

4. Metoda Frobeniusa

Metoda Frobeniusa polega na poszukiwaniu rozwiązań równania (5) w pobliżu punktu osobliwego t_0 w postaci tak zwanego szeregu Frobeniusa:

$$x(t, \lambda) = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n. \tag{9}$$

z nieokreślonymi liczbami $\lambda, a_0, a_1, \ldots$, przy czym wykładnik λ jest wybierany w taki sposób, żeby $a_0 \neq 0$. Piszemy $x(t,\lambda)$ dla podkreślenia, że rozwiązanie zależy zarówno od t jak i parametru λ. Dalej, licząc pochodne

$$\begin{aligned} x'(t,\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)a_n t^{n+\lambda-1}, \\ x''(t,\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n t^{n+\lambda-2} \end{aligned} \tag{10}$$

i podstawiając (9), (10) do równania (5), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n t^{n+\lambda} + \sum_{m=0}^{\infty} p_m t^m \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)a_n t^{n+\lambda} \\ + \sum_{m=0}^{\infty} q_m t^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+\lambda} = 0 \end{aligned}$$

lub równoważnie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n + \sum_{k=0}^{n}\left[(k+\lambda)p_{n-k} + q_{n-k}\right]a_k\right\} t^{n+\lambda} = 0.$$

Korzystając z (8) powyższe równanie możemy zapisać w następujący sposób:

$$\begin{aligned} L[x](t,\lambda) = a_0 F(\lambda) t^{\lambda} \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{F(\lambda+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+\lambda)p_{n-k} + q_{n-k}\right]a_k\right\} t^{n+\lambda} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Równanie (11) będzie spełnione jedynie wtedy, gdy wszystkie współczynniki przy kolejnych potęgach zmiennej t będą równe zeru. Z faktu, że $a_0 \neq 0$, dla współczynnika przy t^{λ}, otrzymujemy tak zwane *równanie wyznaczające* $F(\lambda) = 0$. Pierwiastki tego równania nazywane są *wykładnikami regularnego punktu osobliwego* $t = 0$. Współczynniki przy kolejnych potęgach $n = 1, 2, \ldots$ wyznaczają związek rekurencyjny

$$F(\lambda+n)a_n = -\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+\lambda)p_{n-k} + q_{n-k}\right]a_k, \text{ gdzie } n = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

który dla ustalonej wartości λ pozwala wyznaczyć współczynniki a_n w zależności od a_0. W ten sposób dla dwóch pierwiastków λ_1, λ_2 równania $F(\lambda) = 0$ możemy wyznaczyć dwa rozwiązania równania (5).

Zauważmy jednak, że w przypadku gdy pierwiastki równania wyznaczającego są sobie równe, to metoda ta daje nam tylko jedno rozwiązanie. Z kolei w sytuacji, gdy mamy różne pierwiastki takie, że $\lambda_1 - \lambda_2 = m$, gdzie $m \in \mathbb{N}$, to układ (12) ma rozwiązanie dla większego z pierwiastków λ_1, natomiast dla $\lambda = \lambda_2$ mamy $F(\lambda_2 + m) = F(\lambda_1) = 0$ i w tym przypadku układ (12) może być sprzeczny.

Podsumowując, niezależnie od przypadku, równanie (5) posiada przynajmniej jedno rozwiązanie postaci (9). Poszukiwanie drugiego rozwiązania równania (5) jest zależne od przypadku, o czym mówi nam następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE 3
Niech $t_0 = 0$ będzie regularnym punktem osobliwym równania (5). Niech funkcje $tp(t)$, $t^2q(t)$ będą analityczne w punkcie $t_0 = 0$, a zatem i rozwijalne w szeregi potęgowe (6) dla $|t| < r_0$. Ponadto niech λ_1, λ_2 będą pierwiastkami równania wyznaczającego (8). Wówczas równanie (5) w przedziale $|t| < r_0$ posiada dwa liniowo niezależne rozwiązania $x_1(t), x_2(t)$:

(i) jeśli $Re(\lambda_1) \neq Re(\lambda_2)$ oraz różnica $\lambda_1 - \lambda_2$ nie jest liczbą naturalną, to

$$x_1 = |t|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \qquad x_2 = |t|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n, \tag{13}$$

a współczynni a_n oraz b_n można wyznaczyć z równania (12);

(ii) jeśli $\lambda_1 = \lambda_2$, to

$$x_1 = |t|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \qquad x_2 = x_1 \ln|t| + |t|^{\lambda_1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n; \tag{14}$$

(iii) jeśli $\lambda_1 - \lambda_2 = m$, gdzie m to dodatnia naturalna liczba, to

$$x_1 = |t|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \qquad x_2 = cx_1 \ln|t| + |t|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n, \tag{15}$$

gdzie współczynniki a_n, b_n, c_n, d_n oraz mogąca się zerować stała $c \in \mathbb{R}$ są wyznaczane poprzez podstawienie odpowiedniej postaci $x(t)$ do równania (5).

Zanim przystąpimy do dowodu tego twierdzenia pragniemy podkreślić, że stałe c_n oraz c, d_n mogą być również wyznaczone odpowiednio ze wzorów (21) oraz (24) zaprezentowanych w dalszym ciągu pracy.

Dowód. W dowodzie będziemy pisać $a_n(\lambda_i)$ dla $i = 1, 2$, aby podkreślić od którego pierwiastka zależą współczynniki a_n.

(i) Na mocy założenia, że λ_1, λ_2 są różnymi pierwiastkami równania wyznaczającego, możemy zapisać:

$$F(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + p_0\lambda + q_0 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

Wówczas zachodzi oszacowanie:

$$|F(\lambda_1 + n)| = |n(n + \lambda_1 - \lambda_2)| \geq n(n - |\lambda_1 - \lambda_2|). \tag{16}$$

Ze zbieżności szeregów (6) w $|t| = r < r_0$ istnieje stała $K > 0$ taka, że:

$$|p_j| r^j \leq K \qquad \text{oraz} \qquad |q_j| r^j \leq K \quad \text{dla} \quad j = 0, 1, \ldots.$$

Stąd oraz na podstawie (16), (12) otrzymujemy:

$$n(n-|\lambda_1-\lambda_2|)|a_n(\lambda_1)| \le K\sum_{k=0}^{n-1}(k+|\lambda_1|+1)r^{-n+k}|a_k(\lambda_1)|, \text{ dla } n=1,2,\ldots. \quad (17)$$

Wybierzmy teraz liczbę naturalną N, taką, że: $N-1 \le |\lambda_1-\lambda_2| < N$ oraz zdefiniujmy dodatnie stałe A_j następująco:

$$A_0 = a_0(\lambda_1) = 1, \qquad A_j = |a_j(\lambda_1)|, \quad \text{dla } \ j = 1,2,\ldots,N-1$$

oraz

$$j(j-|\lambda_1-\lambda_2|)A_j = K\sum_{k=0}^{j-1}(k+|\lambda_1|+1)r^{-j+k}A_k, \text{ dla } j=N,N+1,\ldots. \quad (18)$$

Porównując definicję A_j z nierównością (17) łatwo zauważyć, że

$$|a_n(\lambda_1)| \le A_n, \text{ dla } n=0,1,2,\ldots. \quad (19)$$

Pokażemy, że szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n t^n$ jest zbieżny dla $|t|<r$. Zamieniając w (18) j na $n+1$, mamy

$$r(n+1)(n+1-|\lambda_1-\lambda_2|)A_{n+1} = [n(n-|\lambda_1-\lambda_2|)+K(n+1+|\lambda_1|)]\,A_n$$

dla $k \ge N$. Stąd

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{A_{n+1}t^{n+1}}{A_n t^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{[n(n-|\lambda_1-\lambda_2|)+K(n+1+|\lambda_1|)]}{r(n+1)(n+1-|\lambda_1-\lambda_2|)}|t| = \frac{|t|}{r}.$$

Zatem, na mocy kryterium zbieżności d'Alemberta, szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_k t^k$ jest zbieżny dla $|t|<r$.

Teraz, z nierówności (19) oraz z kryterium porównawczego, otrzymujemy zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_1)t^n$ dla $|t|<r$, gdzie $a_0(\lambda_1)=1$. Ostatecznie, z dowolności wyboru r spełniającego $0<r<r_0$, wynika zbieżność tego szeregu dla $|t|<r_0$. Zatem, możemy stwierdzić, że $|t|^{\lambda_1}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_1)t^n$ jest analitycznym rozwiązaniem równania (5) przynajmniej dla $0<|t|<r_0$.

Jeżeli zastąpimy w powyższym rozważaniu λ_1 na λ_2, wówczas otrzymamy $|t|^{\lambda_2}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_2)t^n$ jest drugim analitycznym rozwiązaniem równania (5) przynajmniej dla $0<|t|<r_0$.

(ii) Postać rozwiązania x_1 otrzymamy tak jak w przypadku (i), więc wystarczy pokazać, że zachodzi (14) dla funkcji x_2. Załóżmy teraz, że λ nie jest pierwiastkiem równania wyznaczającego, natomiast spełnia równianie (12). Wtedy z (11), mamy:

$$L[x](t,\lambda) = a_0F(\lambda)t^{\lambda}. \quad (20)$$

Dalej,

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}L[x](t,\lambda) = L\left[\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right](t,\lambda) = a_0 t^\lambda \left[F'(\lambda) + F(\lambda)\ln t\right].$$

Stąd, ponieważ λ_1 jest dwukrotnym pierwiastkiem równania $F(\lambda) = 0$ mamy $L\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)(t,\lambda_1) = 0$, co oznacza, że $\frac{\partial x}{\partial\lambda}(t,\lambda_1)$ jest drugim rozwiązaniem. Wobec tego

$$x_2 = \frac{\partial x}{\partial\lambda}(t,\lambda_1) = t^{\lambda_1}\ln t\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_1)t^n + t^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial a_n}{\partial\lambda}(\lambda_1)t^n.$$

Zatem

$$x_2 = x_1\ln t + t^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

gdzie

$$c_n = \frac{\partial a_n}{\partial\lambda}(\lambda_1), \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{21}$$

Zauważmy jeszcze, że $c_0 = 0$ gdyż współczynnik a_0 nie zależy od λ.

Przypadek $-r_0 < t < 0$ może być rozważany w podobny sposób. Ponadto, z faktu, że $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ jest jednostajnie i absolutnie zbieżny dla $|t| \leq r < r_0$ wynika jednostajna i absolutna zbieżność szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ dla $|t| \leq r < r_0$, co również uzasadnia założenie, że różniczkowanie po λ było przeprowadzone wyraz po wyrazie. Ostatecznie x_2 jest analityczne dla $0 < |t| < r_0$.

(iii) Na mocy założenia, że pierwiastki λ_1, λ_2 równania wyznaczającego są takie, że $\lambda_1 - \lambda_2 = m$, gdzie m jest dodatnią liczbą naturalną z kroku (i) dostajemy analityczne dla $0 < |t| < r_0$ rozwiązanie x_1 odpowiadające λ_1 postaci $x_1 = |t|^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

Dla pierwiastka λ_2 i zadanej $a_0(\lambda_2)$ z zależności rekurencyjnej (12) możemy wyznaczyć skończone wartości $a_n(\lambda_2)$, dla $n = 1, 2, \ldots, m-1$. Jednakże dla $n = m$ pojawia się problem, gdyż współczynnik przy $a_n(\lambda_2)$ równa się $F(\lambda_2 + m) = F(\lambda_1) = 0$. Mogą tutaj, w zależności od zerowania się prawej strony równania (12), wystąpić dwa przypadki. Jeśli jest ona równa zero, równanie to jest spełnione dla dowolnej wartości a_m, co pozwala nam również wyznaczyć a_n dla $n = m+1, m+2, \ldots$. W ten sposób dostajemy rozwiązanie x_2 z (15) ze stałą $c = 0$:

$$x_2 = |t|^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n.$$

Jeśli prawa strona równania (12) jest różna od zera to w celu znalezienia drugiego rozwiązania wybieramy $a_0(\lambda) = \lambda - \lambda_2$. Wówczas $a_n(\lambda_2) = 0$ dla $n = 0, 1, \ldots, m-1$ oraz $a_m(\lambda_2)$ istnieje i jest nieokreślony. Wybierając $a_m(\lambda_2)$ w sposób dowolny ze związku rekurencyjnego (12) wyznaczamy $a_{m+n}(\lambda_2)$ w zależności od $a_m(\lambda_2)$. W ten sposób otrzymujemy rozwiązanie w postaci szeregu zaczynającego się od $m-$tej potęgi t :

$$t^{\lambda_2} \sum_{n=m}^{\infty} a_n(\lambda_2) t^n = t^{\lambda_1} \sum_{n=m}^{\infty} a_n(\lambda_2) t^{n-m} = t^{\lambda_1} \sum_{l=0}^{\infty} a_l^*(\lambda_2) t^l, \tag{22}$$

gdzie $a_l^*(\lambda_2) = a_{l+m}(\lambda_2)$ dla $l = 0, 1, \ldots$. Zauważmy, że współczynniki $a_l^*(\lambda_2)$ są wyznaczane z (12) oraz $F(\lambda_1) = F(\lambda_2 + m)$, zatem rozwiązanie (22) jest co do stałej równe rozwiązaniu x_1.

W celu otrzymania rozwiązania powiązanego z λ_2 analogicznie do przypadku (ii) załóżmy, że λ nie jest pierwiastkiem równania wyznaczającego, natomiast spełnia równianie (12). Stąd oraz z faktu, że $a_0(\lambda) = \lambda - \lambda_2$ z (11), dostajemy:

$$L[x](t, \lambda) = a_0 F(\lambda) t^\lambda = t^\lambda (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^2. \tag{23}$$

Powtarzając rozważania z (ii) mamy $L\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)(t, \lambda_2) = 0$, co oznacza, że $\frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \lambda_2)$ jest drugim rozwiązaniem. Zatem

$$x_2 = \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \lambda_2) = t^{\lambda_2} \ln t \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_2) t^n + t^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial a_n}{\partial \lambda}(\lambda_2) t^n.$$

Stąd, ponieważ $a_0(\lambda_2) = \cdots = a_{m-1}(\lambda_2) = 0$ oraz na mocy (22), możemy zapisać

$$x_2 = c x_1 \ln t + t^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n,$$

gdzie

$$c = a_m(\lambda_2) \quad \text{oraz} \quad d_n = \frac{\partial a_n}{\partial \lambda}(\lambda_2). \tag{24}$$

Ponadto, powtarzając rozważania z przypadku (ii) otrzymujemy, że rozwiązanie x_2 jest analityczne dla $0 < |t| < r_0$, co kończy dowód.

Umowa. Niejednokrotnie w niniejszym artykule twierdzenie 3 będziemy nazywać *twierdzeniem Frobeniusa.*

Uwaga 1

Niech $\lambda_1 > \lambda_2$ będą rzeczywistymi pierwiastkami równania wyznaczającego. Jeżeli rozwiązanie stowarzyszone z mniejszym pierwiastkiem tego równania λ_2:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+\lambda_2}$$

zawiera dwie dowolne stałe, to jest ono rozwiązaniem ogólnym. Nie musimy wówczas wyznaczać równania stowarzyszonego z λ_1.

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Frobeniusa również jest prawdziwe, o czym mówi twierdzenie Fuchsa (Yosida, 1960, twierdzenie 12.1). Mianowicie, jeżeli wszystkie rozwiązania równania (5) spełniają warunek

$$\lim_{t \to 0} t^\lambda x(t) = 0$$

dla pewnej wartości λ, wtedy funkcje $tp(t)$ oraz $t^2 q(t)$ są analityczne w punkcie $t_0 = 0$.

4.1. Metoda redukcji rzędu

Metoda Frobeniusa rozwiązywania równań różniczkowych z regularnymi punktami osobliwymi pozwala nam w łatwy sposób otrzymać zazwyczaj tylko jedno rozwiązanie $x_1(t)$. W celu otrzymania drugiego liniowo niezależnego rozwiązania można posłużyć się metodą redukcji rzędu. Polega ona na poszukiwaniu rozwiązania $x_2(t)$ w postaci:

$$x_2(t) = u(t)x_1(t), \tag{25}$$

gdzie $x_1(t)$ to pierwsze rozwiązanie. Następnie, ponieważ $x_1(t)$ jest rozwiązaniem to wstawiając (25) do (5), mamy

$$u''(t)x_1(t) + [2x_1'(t) + p(t)x_1(t)]u'(t) = 0.$$

Rozwiązując powyższe równanie poprzez obniżenie rzędu, dostajemy

$$u'(t) = \frac{exp\left(\int -p(t)dt\right)}{x_1^2(t)}. \tag{26}$$

Zatem

$$x_2(t) = x_1(t)\int x_1^{-2}(t)exp\left(-\int p(t)dt\right)dt. \tag{27}$$

Ponadto zauważmy, że z (26) mamy, że $u'(t) \neq 0$. Stąd $u(t) \neq const.$, co oznacza liniowo niezależność $x_1(t)$ i $x_2(t)$.

4.2. Regularne punkty osobliwe na nieskończoności

Metoda szeregów Frobeniusa może być z powodzeniem stosowana dla równań

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0 \tag{28}$$

przy $|t| \to \infty$. W tym celu należy dokonać zamiany zmiennych $t = \frac{1}{\xi}$ i rozważać rozwiązania odpowiedniego równania w pobliżu $\xi = 0$. Ponieważ

$$\frac{dx}{dt}(t) = -\xi^2\frac{dx}{d\xi}\left(\frac{1}{\xi}\right) \qquad \text{oraz} \qquad \frac{d^2x}{dt}(t) = \xi^4\frac{d^2x}{d\xi^2}\left(\frac{1}{\xi}\right) + 2\xi^3\frac{dx}{d\xi}\left(\frac{1}{\xi}\right),$$

więc równanie (28) przyjmie postać:

$$\xi^4x''\left(\frac{1}{\xi}\right) + \left[2\xi^3 - \xi^2p\left(\frac{1}{\xi}\right)\right]x'\left(\frac{1}{\xi}\right) + q\left(\frac{1}{\xi}\right)x\left(\frac{1}{\xi}\right) = 0. \tag{29}$$

Niech $x(t)$ będzie rozwiązaniem równania (28) dla $|t| > t_0 > 0$. Wprowadzając

$$\overline{x}(\xi) = x\left(\frac{1}{\xi}\right), \qquad \overline{p}(\xi) = p\left(\frac{1}{\xi}\right), \qquad \overline{q}(\xi) = q\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

dla $|\xi| < \frac{1}{t_0}$ z równania (29), dostajemy:

$$\xi^2\overline{x}''(\xi) + \xi\left(2 - \frac{\overline{p}(\xi)}{\xi}\right)\overline{x}'(\xi) + \frac{\overline{q}(\xi)}{\xi^2}\overline{x}(\xi) = 0. \tag{30}$$

Będziemy mówić, że $t = \infty$ jest *regularnym punktem osobliwym równania (28)* jeśli $\xi = 0$ jest regularnym punktem osobliwym równania (30).

Uwaga 2
Na podstawie powyższej definicji zauważmy, że równanie (30) posiada w $\xi = 0$ *regularny punkt osobliwy wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje* $\overline{p}(\xi)/\xi$ *oraz* $\overline{q}(\xi)/\xi^2$ *są analityczne w* $\xi = 0$.

Zatem możemy powiedzieć, że:

Uwaga 3
Punkt $t = \infty$ *jest regularnym punktem osobliwym równania (28) wtedy i tylko wtedy, gdy (28) możemy zapisać w postaci*

$$t^2 x''(t) + tp_1(t)x'(t) + q_1(t)x(t) = 0$$

gdzie funkcje $p_1(t)$, $q_1(t)$ *posiadają zbieżne rozwinięcia w szeregi potęgowe potęg* $1/t$ *dla* $|t| > t_0$, $t_0 > 0$.

5. Przykłady

Na wstępie tego rozdziału podkreślmy, że ważnym przykładem z zakresu równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu z punktami osobliwymi jest równanie Bessela:

$$t^2 x''(t) + tx'(t) + (t^2 - m^2)x(t) = 0$$

określone dla dowolnych liczb zespolonych m, zwanych rzędem równania Bessela. Pojawia się ono między innymi podczas rozwiązywania, jakże istotnych równań Laplace'a i Helmholtza metodą rozdzielania zmiennych we współrzędnych sferycznych i cylindrycznych. Równanie Bessela posiada regularny punkt osobliwy $t = 0$ oraz nieregularny punkt osobliwy $t = \infty$, a jego rozwiązaniami są funkcje Bessela $J_m(x)$. Ze względu na obszerne informacje na temat metod rozwiązywania równania Bessela występujące w literaturze polskiej, m.in. Lenda (2004), Palczewski (2004), w naszej pracy ograniczamy się wyłącznie do rozwiązania szczególnego przypadku dla $m^2 = \frac{1}{4}$ (co uczynimy w przykładzie 2).

W niniejszej części, korzystając przede wszystkim z twierdzenia Frobeniusa, przedstawimy różnorodne możliwe sposoby rozwiązywania równań różniczkowych drugiego rzędu z regularnymi punktami osobliwymi. Jak było to udowodnione wcześniej, co najmniej jedno z rozwiązań równań z regularnymi punktami osobliwymi jest w postaci szeregu Frobeniusa, dlatego przede wszystkim interesujące są sposoby wyznaczania rozwiązania x_2.

Pierwsze dwa przykłady pokazują jak można postępować w przypadku otrzymania równania wyznaczającego, którego różnica pierwiastków jest liczbą całkowitą. W przykładzie 1. w celu otrzymania drugiego rozwiązania posłużymy się metodą redukcji rzędu, natomiast przykład 2. ilustruje możliwość otrzymania dwóch rozwiązań w oparciu o mniejszy z pierwiastków równania wyznaczającego. Przykład trzeci i czwarty pokazują różne możliwości powstałe w przypadku, gdy pierwiastek jest dwukrotny. W przykładzie 3. postać drugiego rozwiązania dostaniemy podstawiając odpowiedni wzór z twierdzenia 3 do rozpatrywanego równania, podczas gdy w przykładzie 4. nieznane w x_2 współczynniki wyznaczymy przez różniczkowanie $a_n(\lambda)$. Nie rozwiązujemy tutaj przykładów najłatwiejszego przypadku, gdy pierwiastki równania wyznaczającego są różne. W wypadku tym, jak również w celu zapoznania się z większą ilością ciekawych przykładów, zachęcamy Czytelnika do lektury Lenda, Spisak (2006, rozdział 2). Na końcu rozdziału zainteresowany Czytelnik znajdzie przykłady do samodzielnego rozwiązania wraz z podanymi odpowiedziami.

W przykładach 1–3 punkt $t_0 = 0$ jest regularnym punktem osobliwym (co pozostawiamy do sprawdzenia Czytelnikowi), natomiast w przykładzie 4 regularnym punktem osobliwym jest $t = \infty$. Naszym zadaniem jest znalezienie rozwiązań w pobliżu tych punktów.

Przykład 1

Znajdziemy rozwiązania równania

$$tx'' - tx' - x = 0. \tag{31}$$

Zgodnie z metodą Frobeniusa wstawiając funkcje x, x', x'' w postaci szeregów (9)-(10) do równania (31) otrzymujemy:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n t^{n+\lambda-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda+1)a_n t^{n+\lambda} = 0 \tag{32}$$

oraz równanie wyznaczające $\lambda(\lambda - 1) = 0$. Jego pierwiastkami są $\lambda_1 = 1$ oraz $\lambda_2 = 0$. Różnica $\lambda_1 - \lambda_2$ jest liczbą całkowitą, więc dostajemy przypadek (*iii*) twierdzenia Frobeniusa. Z zależności (32) porównując współczynniki przy $t^{n+\lambda}$ otrzymujemy wzór rekurencyjny na współczynniki a_n :

$$(n+\lambda-1)a_n - a_{n-1} = 0, \text{ dla } n \geq 0. \tag{33}$$

Stąd

$$a_n = \frac{1}{n+\lambda-1}a_{n-1}, \text{ dla } n \geq 1, \tag{34}$$

o ile $n + \lambda - 1 \neq 0$.

Rozważmy najpierw większy z pierwiastków równania wyznaczającego, dla którego na mocy twierdzenia 3 rozwiązanie będzie w postaci szeregu Frobeniusa. Wstawiając w (34) $\lambda = \lambda_1 = 1$ otrzymujemy wzór rekurencyjny $a_n = \frac{1}{n}a_{n-1}$. Stąd zaś $a_n = \frac{1}{n!}a_0$, więc rozwiązanie x_1 równania (31) ma formę:

$$x_1 = a_0 t\left(1 + \frac{1}{1!}t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \ldots + \frac{1}{n!}t^n + \ldots\right) = a_0 t e^t.$$

W przypadku mniejszego z pierwiastków jeżeli postąpilibyśmy tak jak dla λ_1 otrzymalibyśmy sprzeczność. Rzeczywiście, podstawiając w (33) $\lambda = \lambda_2 = 0$ mielibyśmy $(n-1)a_n = a_{n-1}$. Podstawiając w tym wzorze $n = 1$ otrzymalibyśmy, że $a_0 = 0$, co jest sprzeczne z założeniem, że $a_0 \neq 0$.

Postać rozwiązania x_1 sugeruje użycie metody redukcji rzędu opisanej w 4.1 W tym celu posługując się wzorem (27) dostaniemy

$$x_2 = \frac{1}{a_0} te^t \int \frac{1}{t^2 e^{2t}} exp\left(-\int (-1)dt\right) dt = \frac{1}{a_0} te^t \int \frac{e^{-t}}{t^2} dt.$$

Następnie, ponieważ zachodzi formuła (Bronsztejn, Musiol, Siemiendiajew, Mühlig, 2004, całki 451-452 str. 1147)

$$\int \frac{e^{-x}}{x^2} dx = -\frac{e^{-x}}{2x} - \frac{1}{2}\left(\ln x + \frac{(-x)}{1 \cdot 1!} + \frac{(-x)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(-x)^3}{3 \cdot 3!} + \dots\right),$$

mamy

$$\begin{aligned} x_2 =& \frac{1}{a_0} te^t \left[-\frac{e^{-t}}{2t} - \frac{1}{2}\left(\ln t + \frac{(-t)}{1 \cdot 1!} + \frac{(-t)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(-t)^3}{3 \cdot 3!} + \dots\right)\right] \\ =& -\frac{1}{2a_0} te^t \ln t - \frac{1}{2a_0}\left[1 + \frac{(-t)}{1 \cdot 1!} + \frac{(-t)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(-t)^3}{3 \cdot 3!} + \dots\right]. \end{aligned}$$

Ponadto możemy zauważyć, że rozwiązanie x_2 jest postaci takiej jak w (15).

Przykład 2
Tym razem spróbujemy znaleźć rozwiązania równania

$$t^2 x'' + tx' + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right) x = 0.$$

Dokonując odpowiednich podstawień oraz elementarnych przekształceń, dostaniemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+\lambda)^2 - \frac{1}{4}\right] a_n t^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+2+\lambda} = 0. \tag{35}$$

W tym przypadku równanie wyznaczające jest postaci $\lambda^2 - \frac{1}{4} = 0$, zatem jego pierwiastkami są liczby $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Ich różnica jest liczbą całkowitą, więc mamy do czynienia z przypadkiem (*iii*) twierdzenia 3. Spróbujemy skorzystać tutaj z Uwagi 1, zgodnie z którą może się okazać, że rozwiązanie odpowiadające mniejszemu z pierwiastków równania wyznaczającego (czyli $\lambda = -\frac{1}{2}$) zawiera dwie dowolne stałe. Wtedy to rozwiązanie będzie jednocześnie rozwiązaniem ogólnym rozważanego przez nas równania.

Porównując współczynniki przy t^{n+2} w równaniu (35), otrzymamy zależność $\left[(n+2+\lambda)^2 - \frac{1}{4}\right] a_{n+2} + a_n = 0$. Kładąc teraz $\lambda = \lambda_2 = -\frac{1}{2}$, dostaniemy

$$a_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} a_n, \text{ dla } n \geq 0. \tag{36}$$

Z drugiej strony, porównując współczynniki przy t^1 dla $\lambda = -\frac{1}{2}$, mamy $0 \cdot a_1 = 0$, zatem a_1 jest dowolną liczbą rzeczywistą różną od zera. Możemy teraz wyznaczyć kilka kolejnych wyrazów ciągu (36):

$$a_2 = \frac{-1}{2!} a_0, \ a_3 = \frac{-1}{3!} a_1, \ a_4 = \frac{1}{4!} a_0, \ a_5 = \frac{1}{5!} a_1, \ a_6 = \frac{-1}{6!} a_0, \ a_7 = \frac{-1}{7!} a_1, \dots,$$

więc rozwiązanie x_2 jest postaci

$$x_2 = \frac{a_0}{\sqrt{|t|}}\left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots\right) + \frac{a_1}{\sqrt{|t|}}\left(1 - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots\right)$$
$$= \frac{a_0}{\sqrt{|t|}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n} + \frac{a_1}{\sqrt{|t|}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1} = \frac{a_0}{\sqrt{|t|}}\cos t + \frac{a_1}{\sqrt{|t|}}\sin t.$$

Jest to jednocześnie rozwiązanie ogólne rozpatrywanego równania. Proponujemy Czytelnikowi sprawdzenie tego faktu poprzez wyznaczenie rozwiązania dla $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2}$.

Przykład 3
Znajdziemy rozwiązania równania

$$t^2x'' - tx' + (t^2+1)x = 0. \tag{37}$$

Poszukujemy rozwiązania w postaci szeregu Frobeniusa. Kładąc funkcje x, x', x'' w postaci szeregów (9)-(10) do równania (37) otrzymujemy:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big[(n+\lambda)(n+\lambda-2)+1\big]a_n t^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n t^{n+\lambda+2} = 0. \tag{38}$$

Porównując współczynniki przy potędze t^λ dostajemy równanie wyznaczające $(\lambda-1)^2 = 0$, co oznacza, że mamy przypadek (*ii*) twierdzenia 3: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. W związku z tym tylko jedno z rozwiązań będzie w postaci szeregu Frobeniusa.

Wstawiając w (38) $\lambda = 1$ dostajemy:

$$\sum_{n=0}^{\infty}n^2 a_n t^{n+\lambda} + \sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}t^{n+\lambda} = 0.$$

Stąd, wyznaczając zależności pomiędzy współczynnikami a_n dla $n \geq 1$, mamy

$$\begin{cases} a_0 \neq 0; & \\ a_{2k} = -\frac{1}{4k^2}a_{2k-2} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}a_0, & \text{dla } k \geq 1; \\ a_{2k+1} = 0, & \text{dla } k \geq 0. \end{cases}$$

Zatem rozwiązanie x_1 z dokładności do stałej ma formę:

$$x_1 = a_0 t\left(1 + \frac{(-1)}{2^2\cdot(1!)^2}t^2 + \frac{(-1)^2}{2^4\cdot(2!)^2}t^4 + \dots + \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}t^{2n} + \dots\right)$$
$$= a_0 t \cdot J_0(t),$$

gdzie $J_0(t)$ jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju rzędu 0.

Niech $a_0 = 1$. Wyznaczymy teraz drugie rozwiązanie x_2 równania (37). Szukamy go w postaci właściwej do przypadku (*ii*) twierdzenia 3:

$$x_2 = x_1 \ln t + \sum_{n=1}^{\infty}b_n t^{n+1}. \tag{39}$$

Różniczkując dwukrotnie (39), a następnie wstawiając x_2, x_2', x_2'' do (37), mamy

$$\Big(\overbrace{t^2x_1'' - tx_1' + (t^2+1)x_1}^{=0}\Big)\ln t + 2tx_1' - 2x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^{n+3}$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)b_n t^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)b_n t^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^{n+1} = 0. \quad (40)$$

Następnie, ponieważ $x_1 = t \cdot J_0(t)$, gdzie $J_0(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}t^{2n}$ wynika, że

$$2tx_1' - 2x_1 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4n}{2^{2n}(n!)^2}t^{2n+1}.$$

Stąd z (40) dostajemy

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4n}{2^{2n}(n!)^2}t^{2n+1} + \sum_{n=4}^{\infty}\left[(n-1)^2 b_{n-1} + b_{n-3}\right]t^n + b_1t^2 + 4b_2t^3 = 0.$$

Ostatecznie wyznaczając kilka kolejnych wyrazów ciągu (b_n) :

$$b_1 = 0, \quad b_2 = \frac{1}{4}, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = -\frac{3}{128}, \quad b_5 = 0, \quad b_6 = \frac{3}{512}, \ldots$$

otrzymujemy drugie rozwiązanie równania (37):

$$x_2 = t\ln t \cdot J_0(t) + \left(\frac{1}{4}t^3 - \frac{3}{128}t^5 + \frac{3}{512}t^7 + \ldots\right).$$

Przykład 4

Znajdziemy teraz rozwiązania równania

$$x'' + \frac{1+5t}{t^2+t}x' + \frac{1}{t^2+t}x = 0 \quad (41)$$

dla dużych t.

Dokonując w powyższym równaniu zamiany $t = \frac{1}{\xi}$ i stosując przekształcenia opisane w części 4.2. dostajemy

$$\xi^2(1+\xi)\overline{x}'' - \xi(3-\xi)\overline{x}' + 4\overline{x} = 0, \quad (42)$$

gdzie $\overline{x}(\xi) = x(\frac{1}{\xi})$. Jak łatwo sprawdzić punkt $\xi = 0$ jest regularnym punktem osobliwym równania (42). Zatem, na mocy definicji, punkt $t = \infty$ jest regularnym punktem osobliwym równania (41).

Przystąpimy teraz do rozwiązania równania (42). Kładąc w nim funkcje $\overline{x}$, $\overline{x}'$, $\overline{x}''$ w postaci szeregów (9)-(10) zmiennej ξ dostajemy:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+\lambda)(n+\lambda-4)+4\right]a_n\xi^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)^2 a_n\xi^{n+\lambda+1} = 0. \quad (43)$$

Tutaj równanie wyznaczające jest postaci $(\lambda-2)^2=0$, co oznacza, że kolejny raz mamy przypadek (*ii*) twierdzenia 3: $\lambda_1=\lambda_2=2$.

W zależności (43) porównując współczynniki przy $\xi^{n+\lambda}$ otrzymujemy wzór rekurencyjny na $a_n(\lambda)$:

$$a_n(\lambda)=\frac{-(n+\lambda-1)^2}{(n+\lambda)(n+\lambda-4)+4}a_{n-1}=\frac{-(n+\lambda-1)^2}{(n+\lambda-2)^2}a_{n-1},\quad \text{dla } n\geq 1.$$

Stąd,

$$a_n(\lambda)=(-1)^n\frac{(n+\lambda-1)^2}{(\lambda-1)^2}a_0,\ \text{ dla } n\geq 1. \tag{44}$$

Wstawiając $\lambda=2$ do (44) mamy $a_n(2)=(-1)^n(n+1)^2a_0$. Zatem rozwiązanie $\overline{x}_1$ równania (42) ma postać

$$\overline{x}_1=a_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2\xi^n. \tag{45}$$

W tym przykładzie rozwiązanie $\overline{x}_2$ otrzymamy, stosując następujący wzór z twierdzenia 3

$$\overline{x}_2=\overline{x}_1\ln|\xi|+|\xi|^{\lambda_1}\sum_{n=1}^{\infty}c_n\xi^n,\quad \text{gdzie}\quad c_n=\frac{\partial a_n}{\partial\lambda}(\lambda_1). \tag{46}$$

W celu wyznaczenia współczynników c_n korzystamy z zależności (44). Różniczkując, mamy

$$a'(\lambda)=(-1)^{n+1}a_0\frac{2n(n+\lambda-1)}{(\lambda-1)^3}.$$

Zatem, kładąc w powyższym wzorze $\lambda=2$ oraz (45)-(46), otrzymujemy drugie rozwiązanie równania (42) postaci

$$\overline{x}_2=a_0\ln|\xi|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2\xi^n+a_0\xi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}2n(n+1)\xi^n. \tag{47}$$

Ostatecznie na mocy podstawień $t=\frac{1}{\xi}$, $\overline{x}(\xi)=x\left(\frac{1}{\xi}\right)$ z (45) i (47) otrzymujemy dwa rozwiązania równania (41) w pobliżu regularnego punktu osobliwego $t=\infty$ w postaci

$$\begin{aligned}
x_1=&a_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2\left(\frac{1}{t}\right)^n,\\
x_2=&a_0\ln\left|\frac{1}{t}\right|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2\left(\frac{1}{t}\right)^n+a_0\left(\frac{1}{t}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}2n(n+1)\left(\frac{1}{t}\right)^n.
\end{aligned}$$

Zadanie 1

Znajdź dwa liniowo niezależne rozwiązania w pobliżu regularnego punktu osobliwego $t_0 = 0$:

a) $2t^2x'' + 5tx' + (t+1)x = 0$,
b) $9t^2x'' - (t^2-2)x = 0$,
c) $t^2x'' - (t+t^2)x' + x = 0$,
d) $t^2x'' + 3tx' + (1-t)x = 0$,
e) $t(t-1)x'' + (3t-1)x' + x = 0$,
f) $tx'' + 2x' + tx = 0$,
g) $t^2x'' - 2tx' + (2-t^2)x = 0$,
h) $t^2x'' - tx' + (t-3)x = 0$,

Odpowiedzi:

a) $x_1 = |t|^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{30}t^2 - \frac{1}{630}t^3 + \ldots\right),\ x_2 = t^{-1}\left(1 - t + \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{90}t^3 + \ldots\right);$

b) $x_1 = t^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{1}{5\cdot 6}t^2 + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 11\cdot 12}t^4 + \ldots\right),\ x_2 = t^{\frac{2}{3}}\left(1 + \frac{1}{6\cdot 7}t^2 + \frac{1}{6\cdot 7\cdot 12\cdot 13}t^4 + \ldots\right);$

c) $x_1 = te^t,\ x_2 = x_1 \ln|t| + e^t\left(-t^2 + \frac{1}{2\cdot 2!}t^3 - \frac{1}{3\cdot 3!}t^4 + \ldots\right);$

d) $x_1 = t^{-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}t^n,\ x_2 = x_1\ln|t| - \left(2 + \frac{3}{4}t + \frac{11}{108}t^2 + \frac{25}{3456}t^3 + \ldots\right);$

e) $x_1 = \frac{1}{1-t},\ x_2 = \frac{\ln|t|}{1-t};$

f) $x_1 = 1 - \frac{1}{3!}t^2 + \frac{1}{5!}t^4 - \ldots = \frac{\sin t}{t},\quad x_2 = t^{-1} - \frac{1}{2!}t + \frac{1}{4!}t^3 - \ldots = \frac{\cos t}{t};$

g) $x_1 = t\left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + \ldots\right),\ x_2 = t^2\left(1 + \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{120}t^4 + \ldots\right);$

h) $x_1 = t^3\left(1 - \frac{1}{5}t + \frac{1}{60}t^2 - \frac{1}{1260}t^3 + \ldots\right),$
$x_2 = -\frac{1}{144}x_1\ln|t| + t^{-1}\left(1 + \frac{1}{3}t + \frac{1}{12}t^2 + \frac{1}{36}t^3 + \ldots\right).$

Literatura

Agarwal, R. P., O'Regan, D.: 2009, *Ordinary and Partial Differential Equations with Special Functions, Fourier Series, and Boundary Value Problems*, Springer Science & Business Media, New York.

Boyce, W. E., DiPrima, R. C.: 2001, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 7th edition*, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Bronsztejn, I., Musiol, G., Siemiendiajew, K., Mühlig, H.: 2004, *Nowoczesne kompendium matematyki*, PWN, Warszawa.

Coddington, E. A.: 1989, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, New York.

Frobenius, F. G.: 1873, Ueber die integration der linearen differentialgleichungen durch reihen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **76**, 214–235.

Ince, E. L.: 1926, *Ordinary Differential Equations*, Longmans, Green and Co, London, New York.

Lenda, A.: 2004, *Wybrane rozdziały matematycznych metod fizyki*, Wydawnictwo AGH, Kraków.

Lenda, A., Spisak, B.: 2006, *Wybrane rozdziały matematycznych metod fizyki, rozwiązane problemy*, Wydawnictwo AGH, Kraków.

McQuarrie, D. A.: 2005, *Matematyka dla przyrodników i inżynierów*, Vol. 2, PWN, Warszawa.

Palczewski, A.: 2004, *Równania różniczkowe zwyczajne*, PWN, Warszawa.

Rybka, P.: 2012, `http://www.mimuw.edu.pl/~rybka/dydaktyka/ref_14_11.pdf`.

Yosida, K.: 1960, *Lectures on Differential and Integral Equations*, John Wiley & Sons Inc., New York.

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie
ul. Słoneczna 54
PL-10-710 Olsztyn
e-mail dawi@matman.uwm.edu.pl
e-mail krzysztof.zyjewski@uwm.edu.pl