FOLIA 163

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia VI (2014)

Eduard Heine

Elementy Teorii Funkcji*

Postęp w teorii funkcji jest istotnie hamowany przez tę okoliczność, że pewne elementarne jej twierdzenia, choć udowodnione przez wnikliwych badaczy, ciągle jeszcze podawane są w wątpliwość, tak, że wyniki badań nie wszędzie uchodzą za poprawne, gdy odwołują się do owych niezbędnych twierdzeń. Wyjaśnienie znajduję w tym, że chociaż zasady Pana WEIERSTRASSA, które same rozprzestrzeniły się w szerszych kręgach, bezpośrednio poprzez jego wykłady oraz inne ustne oznajmienia, a pośrednio poprzez odpisy notatek, opracowanych na podstawie tych wykładów, to jednak nie zostały one przez niego samego opublikowane w druku w autentycznej wersji, a więc nie ma miejsca, w którym znajdzie się te twierdzenia *rozwijane we wzajemnych związkach*. Ich prawdziwość opiera się jednak na nie w pełni ustanowionej definicji liczb niewymiernych, w której często uwikłane są przedstawienia geometryczne, a mianowicie *wytworzenie* linii *poprzez ruch. Twierdzenia te są słuszne dla leżącej u podstaw definicji liczb niewymiernych, w której te liczby nazywane są równymi, które nie różnią się żadną podaną jakkolwiek małą liczbą, przy której to definicji dalej liczba niewymierna uzyskuje rzeczywiste istnienie*, tak, że funkcja jednowartościowa dla każdej *poszczególnej* wartości zmiennej, czy to wymiernej, czy niewymiernej, zawsze posiada *określoną* wartość. Z innego punktu widzenia można jednak wysuwać prawomocne obiekcje przeciw prawdziwości tych twierdzeń.

Nie bez wątpliwości publikuję tę pracę, której pierwsza najistotniejsza część „O liczbach" jest od długiego już czasu ukończona. Niezależnie od poważnej trudności w przedstawieniu takiego materiału, mam wątpliwości co do opublikowania pracy, zwłaszcza iż zawiera ona przekazane mi ustnie przemyślenia innych, a szczególnie Pana WEIERSTRASSA, tak, że do mnie należy nie więcej niż ich wyłożenie, przy czym chodzi również o to, aby nie pozostawić nigdzie żadnej poważnej luki. Najważniejsza jest konieczność, abym w późniejszej rozprawie odniósł się do podstawowych twierdzeń teorii funkcji, która zmusza mnie do opublikowania niniejszej pracy, w której twierdzeń owych w końcu dowodzę.

Jestem zobowiązany do szczególnego podziękowania Panu CANTOROWI z Halle za jego ustne informacje, które miały znaczący wpływ na kształt moich prac, jako że zapożyczam od niego pomysł, aby ogólne liczby wprowadzać poprzez owe szczególnie przydatne ciągi, które tutaj (A, § 1, Def. 1) będą nazywane cią-

*Elemente der Functionenlehre

gami liczbowymi. Wydaje mi się to, szczególnie dla zastosowań w teorii funkcji (B, § 2, Twierdzenie 1), szczęśliwie kształcące dla pierwotnego sposobu wprowadzania, w którym uogólnione liczby określane są poprzez wielokrotnie zawarte w nich pewne wielkości w nieskończonej liczbie. Uzasadnienie, że to, co wprowadzane jest przez ciągi, traktować należy jako wielkości liczbowe, znajduje Pan Cantor w tym, że jest możliwe również tutaj określić pojęcia większości, mniejszości oraz równości.

Na pytanie, czym miałaby być liczba, odpowiadam, gdy nie chcę ograniczać się jedynie do wymiernych liczb dodatnich, nie przez to, że definiuję pojęciowo liczbę, powiedzmy, wprowadzając liczby niewymierne jako granice, których *istnienie* byłoby założeniem. W definicji przyjmuję czysto formalny punkt widzenia[1], *nazywając pewne konkretne znaki liczbami*, tak, iż istnienie tych znaków nie stoi zatem pod znakiem zapytania. *Główny nacisk położony jest na operacje rachowania*, a znak dla liczby musi być tak wybrany lub zbudowany przy pomocy takiego aparatu, aby zagwarantowany był związek z operacjami.

Regułami rachowania nazywa się reguły, wedle których dwie liczby, które są połączone znakiem operacji, mogą zostać wymienione na jedną. Reguły te będą z początku tak ustalone, że podają one wynik zwykłego rachowania, gdy stosowane są jedynie do liczb 0, 1, 2, 3 itd. Niemożność wykonania w wielu przypadkach odejmowania zmusza do wprowadzenia nowych znaków lub liczb: dla każdego już istniejącego znaku a wprowadza się jeszcze znak $\mathrm{neg}(a)$ i rozszerza definicję operacji w stosowny sposób, tak, że dają one dla nowego znaku wynik taki sam, jak wcześniej dla znaków wcześniejszych. Potem pokazuje się, na mocy odpowiedniej definicji odejmowania, że musi zachodzić $\mathrm{neg}(a) = 0 - a$. Niemożność podzielenia dwóch znaków a oraz b, gdy iloraz nie jest liczbą całkowitą zmusza do dodania podwójnego znaku (a, b) do poprzednich, przy czym związek z owymi poprzednimi ustanawia się przez to, że ma być dozwolone wymienianie $(a, 1)$ z a. Jeśli rozszerzy się objaśnienie mnożenia, to okazuje się, że (a, b) nie jest niczym innym jak wynikiem dzielenia $(a, 1)$ przez $(b, 1)$ lub a przez b. Odtąd dla tak wprowadzonych liczb są możliwe dodawanie, odejmowanie, mnożenie i w ogólności dzielenie – a mianowicie to ostatnie jest w jednym przypadku niemożliwe, gdy mianownik jest zerem, a licznik nie jest zerem. Niemożność wykonywania na dotąd wprowadzonych liczbach we wszystkich przypadkach pierwiastkowania, a także innych jeszcze przestępnych operacji zmusza do wprowadzenia nowych znaków, liczb rzeczywistych niewymiernych oraz urojonych. To, jak wybrane są te pierwsze, aby ustalone były zasady posługiwania się operacjami, widać w rozdziale A. W tymże rozdziale ograniczyłem się do liczb rzeczywistych, ponieważ można z nich bez wysiłku otrzymać zespolone, gdy do znaków a, b itd. dla liczb rzeczywistych doda się jeszcze znaki złożone. Mianowicie, zamiast liczby zespolonej $a + b\sqrt{-1}$ występuje znak (a, b_ι), który, po stosownym objaśnieniu dodawania, będzie równy $a + b_\iota$, a po objaśnieniu mnożenia najpierw będzie równy $a + b \cdot 1_\iota$, a w końcu, ponieważ z tegoż określenia wynika, że 1_ι jest pierwiastkiem z -1, będzie równy $a + b\sqrt{-1}$.

[1] Na sposób omówiony w tym wstępie prowadzę od wielu lat swoje wykłady z analizy algebraicznej.

A. O Liczbach

§ 1. Ciągi liczbowe

1. *Definicja. Ciągiem liczbowym* nazywa się ciąg liczb a_1, a_2 itd., a_n itd., gdy dla każdej jakkolwiek małej różnej od zera liczby η istnieje wartość n taka, że dla wszystkich dodatnich ν, $a_n - a_{n+\nu}$ leży poniżej η.

Uwaga. Słowo *liczba*, bez dalszych dopowiedzeń oznacza w rozdziale A zawsze *liczbę wymierną*. Zero jest przy tym uważane za liczbę wymierną.

2. *Definicja.* Każdy ciąg liczbowy, w którym liczby a_n wraz ze wrastającym indeksem n pozostają poniżej każdej podanej wielkości, nazywa się *ciągiem elementarnym.*

Wniosek. Człony a każdego pojedynczego ciągu liczbowego pozostają poniżej wielkości skończonej. Jeśli ciąg nie jest elementarny, to od pewnej wartości indeksu n pozostają one *wszystkie* powyżej pewnej wielkości różnej od zera.

Oznaczenie. Dla lepszej przejrzystości greckie litery będą używane tylko dla członów ciągów elementarnych. A zatem η_1, η_2 itd., jest ciągiem elementarnym.

1. *Twierdzenie.* Jeśli zarówno a_1, a_2 itd., jak i b_1, b_2 itd. jest ciągiem liczbowym, to także $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$ itd., a dalej $a_1 - b_1$, $a_2 - b_2$ itd., $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ itd. są ciągami liczbowymi.

Dowód. Dla górnych oraz dolnych znaków w $\pm$ mamy, odpowiednio:

$$(a_n \pm b_n) - (a_{n+\nu} \pm b_{n+\nu}) = (a_n - a_{n+\nu}) \pm (b_n - b_{n+\nu}).$$

Wyrażenie to stanie się dowolnie małe wraz ze wzrastającą n, ponieważ owe a oraz b tworzą ciąg liczbowy, a zatem (§ 1, Def. 1) $a_n - a_{n+\nu}$ oraz $b_n - b_{n+\nu}$ stają się dowolnie małe wraz ze wzrastającą n.

Podobnie, zachodzi

$$a_n b_n - a_{n+\nu} b_{n+\nu} = a_n(b_n - b_{n+\nu}) + b_{n+\nu}(a_n - a_{n+\nu}),$$

ponieważ a_n oraz $b_{n+\nu}$ pozostają pod wielkością skończoną (§ 1, Wniosek).

2. *Twierdzenie.* Przy założeniach pierwszego twierdzenia oraz gdy poza tym człony a nie tworzą szeregu elementarnego, również

$$\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots$$

tworzą ciąg liczbowy.

Dowód. Zachodzi

$$\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+\nu}}{a_{n+\nu}} = \frac{b_n a_{n+\nu} - a_n b_{n+\nu}}{a_n a_{n+\nu}} = \frac{b_n(a_{n+\nu} - a_n) + a_n(b_n - b_{n+\nu})}{a_n a_{n+\nu}}.$$

Ponieważ liczniki wyrażeń prawej strony równania stają się dowolnie małe wraz ze wzrastającą n, ale mianowniki pozostają poniżej wielkości różnej od zera (§ 1, Wniosek), więc także lewa strona staje się dowolnie mała wraz ze wzrastającą n.

3. *Definicja. Ciągi liczbowe* a_1, a_2 *itd.*, b_1, b_2 *itd. nazywają się równymi wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg liczbowy* $a_1 - b_1$, $a_2 - b_2$ *itd. jest ciągiem elementarnym.*

3. *Twierdzenie. Wszystkie ciągi elementarne są między sobą równe* oraz na odwrót, ciąg elementarny nie jest równy żadnemu ciągowi liczbowemu innemu niż elementarny.

Dowód. Jeśli ε_n oraz η_n są członami dwóch ciągów elementarnych, to $\varepsilon_n - \eta_n$ pozostaje poniżej każdego stopnia małości wraz ze wzrastającą n. A zatem $\varepsilon_1 - \eta_1$, $\varepsilon_2 - \eta_2$ itd. jest ciągiem elementarnym, a więc (§ 1, Def. 3) rzeczywiście ciąg elementarny ε_1, ε_2 itd. jest równy innemu η_1, η_2 itd.

Ciąg nieelementarny o n-tym członie a_n nie może jednak być równy ciągowi elementarnemu o n-tym członie ε_n, ponieważ $a_n - \varepsilon_n$ pozostaje poniżej podanej wartości wraz ze wrastającą n.

§ 2. Wprowadzenie uogólnionych liczb lub znaków liczbowych

Żądanie. Wprowadzić znak dla każdego ciągu liczbowego.

Jako znak wprowadza się sam ciąg, osadzony w nawiasach kwadratowych, tak, że np. z ciągiem a, b, c itd. stowarzyszony jest znak $[a, b, c$ itd.$]$.

1. *Definicja. Liczbą uogólnioną lub znakiem liczbowym* nazywa się znak stowarzyszony z ciągiem liczbowym.

2. *Definicja. Znaki nazywają się równymi* lub są wymienialne, gdy stowarzyszone są z równymi ciągami liczbowymi, a nazywają się nierównymi lub są niewymienialne, gdy stowarzyszone są z nierównymi ciągami liczbowymi (§ 1, Def. 3).

Oznaczenie. Jeśli $[a, b$ itd.$]$ oraz $[a', b'$ itd.$]$ są sobie równe, to będzie to oznaczane przez $[a, b$ itd.$] = [a', b'$ itd.$]$ lub przez $[a', b'$ itd.$] = [a, b$ itd.$]$.

Skrót. Za znak liczbowy stowarzyszony z ciągiem liczbowym, którego człony utworzone są z równych małych liter, bierze się też odpowiednią dużą literę, a więc znakiem dla $[a_1, a_2$ itd.$]$ jest A, znakiem dla $[\eta_1, \eta_2$ itd.$]$ jest H.

Ustalenie. Znakiem liczbowym stowarzyszonym z ciągiem liczbowym, który zawiera tylko człony równe a, niech będzie sama liczba wymierna a.

1. *Wniosek.* Jest zatem (§ 2, Oznaczenie):

$$[a_1, a_2, a_3, \ldots] = A,$$

$$[a, a, a, \ldots] = a.$$

1. *Twierdzenie. Znakiem każdego ciągu elementarnego jest* 0.

Dowód. Ciągi elementarne są równe (§ 1, Twierdzenie 3), a więc znaki wszystkich ciągów elementarnych są równe (§ 2, Def. 2), a zatem równe znakowi $[0, 0, 0$ itd.$]$, czyli (§ 2, Wniosek 1) równe zero.

Komentarz. Nie rachuje się na ciągach liczbowych, ale na znakach liczbowych. Operacje rachunkowe zostaną niżej (§ 3) zdefiniowane przez ciągi liczbowe, i to tak zdefiniowane, że otrzyma się wyniki znane dla liczb wymiernych, gdy człony a_1, a_2 itd. są wszystkie równe, a więc są znakiem liczbowym dla liczb wymiernych; powyższe *Ustalenie* jest więc dozwolone.

3. *Definicja.* Piszemy $A > B$, gdy $a_n - b_n$ od pewnej wartości liczby n zawsze pozostaje dodatnia, a $A < B$, gdy $a_n - b_n$ od pewnej wartości liczby n zawsze pozostaje ujemna.

Komentarz. Równość wyklucza mniejszość oraz większość. Jeśli mianowicie $A = B$, to człony $a_n - b_n$ należą do ciągu elementarnego; jeśli jednak nie zachodzi

$A = B$, to człony $a_n - b_n$ nie należą do ciągu elementarnego, a więc pozostają, co do wartości bezwzględnej (§ 1, Wniosek 1) powyżej wielkości różnej od zera, tak, że wtedy albo $A > B$, albo $A < B$.

2. *Wniosek.* Jeśli $A > B$, to także $B < A$.

2. *Twierdzenie.* Znaki obu ciągów

$$b_1, b_2, b_3, \ldots;$$

$$a_1, a_2 \text{ itd.}, a_\rho, b_\mu, b_{\mu+1}, b_{\mu+2} \text{ itd.}$$

są wzajem równe.

Dowód. Oba ciągi są wzajem równe, ponieważ ciąg różnic

$$a_1 - b_1, a_2 - b_2, \text{ itd.}, a_\rho - b_\rho, b_\mu - b_{\rho+1}, b_{\mu+1} - b_{\mu+2}, \text{ itd.}$$

jest ciągiem elementarnym (§ 2, Def. 2; § 1, Def. 3).

3. *Wniosek*[2]. Znak liczbowy pozostaje niezmieniony, gdy w ciągu, z którym jest on stowarzyszony, opuści się dowolną skończoną liczbę członów.

§ 3. Rachowanie na liczbach uogólnionych

1. *Definicja.* $A \pm B$ jest tym znakiem, który jest stowarzyszony (§ 1, Twierdzenie 1) z ciągiem liczbowym $a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2$ itd., a AB tym, który jest stowarzyszony z $a_1 b_1, a_2 b_2$ itd. Jeśli nie zachodzi $A = 0$ (§ 1, Twierdzenie 2; § 2, Twierdzenie 1), to $\frac{B}{A}$ jest stowarzyszony z ciągiem liczbowym

$$\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots.$$

1. *Wniosek.* Jeśli $A \pm B = C$ albo $AB = C$, albo, przy założeniu, że A nie posiada wartości zero, $\frac{C}{A} = B$, to odpowiednio:

$$a_n \pm b_n + \eta_n = c_n; \quad a_n b_n + \eta_n = c_n; \quad \frac{c_n}{a_n} + \eta_n = b_n.$$

Na odwrót, z ostatnich trzech równań wynikają te pierwsze.

2. *Wniosek.* $A \pm 0 = A$.

3. *Wniosek.* Znak, który jest stowarzyszony z $-a_1, -a_2$ itd., jest równy $0 - A$.

Uwaga. Zwykło się powszechnie pisać $-A$ zamiast $0 - A$; rachuje się więc z $-A$ tak, jakby obecne było pełne wyrażenie, które zastępuje $-A$.

2. *Definicja.* *Wartością liczbową* lub wartością bezwzględną znaku A jest znak, który otrzymuje się, gdy w ciągu zamiast a wstawia się jego wartość liczbową.

Twierdzenie. Jeśli $A \pm B = C$, albo $AB = C$ i przy tym nie zachodzi $A = 0$, to, odpowiednio, $A = C \mp B$, albo $B = \frac{C}{A}$.

[2] Widać z tego, iż wystarczałoby, aby w znaku stowarzyszonym z ciągiem brać nie pierwsze jego elementy, lecz ogólne prawo, tak, że można wybrać także $[a_n]$ jako znak stowarzyszony z ciągiem a_1, a_2 itd. To prowadzi też do zwykłego oznaczenia, zastępującego nawiasy kropkami, i ustalanie np. $\frac{1}{9} = [0.1, 0.11, 0.111, \text{ itd.}]$, co jest dozwolone (§ 4, Przykład), lecz $= 0,111\ldots$ Poza tym, w dalszym ciągu utrzymane zostaną dotychczasowe oznaczenia.

Dowód. W pierwszym przypadku jest (§ 3, Wniosek 1) $a_n \pm b_n + \eta_n = c_n$, a w konsekwencji $a_n + \eta_n = c_n \mp b_n$. A zatem

$$[a_1 + \eta_1, a_2 + \eta_2 \text{ itd.}] = [c_1 \mp b_1, c_2 \mp b_2 \text{ itd.}].$$

Lewa strona daje (§ 3, Def. 1; § 2, Twierdzenie 1) $A+0$ lub (§ 3, Wniosek 2) A, prawa (§ 3, Def. 1) $C \mp B$. Dowód w drugim przypadku prowadzony będzie podobnie.

§ 4. Związek liczb uogólnionych z wymiernymi

1. *Definicja.* Jeśli dla liczb (wymiernych) a_1, a_2 itd. istnieje liczba (wymierna) $\mathfrak{A}$ o tej własności, że $\mathfrak{A} - a_n$, wraz ze wzrastającą n, pozostaje poniżej każdej podanej wartości, to $\mathfrak{A}$ nazywa się granicą tych a.

1. *Twierdzenie.* Jeśli człony ciągu liczbowego a_1, a_2 itd. mają granicę (wymierną) $\mathfrak{A}$, to $\mathfrak{A}$ jest też znakiem stowarzyszonym z ciągiem a_1, a_2 itd.

Dowód. Na mocy definicji pojęcia granicy (§ 4, Def. 1) człony

$$\mathfrak{A} - a_1, \mathfrak{A} - a_2, \mathfrak{A} - a_3, \ldots$$

tworzą ciąg elementarny, którego znakiem jest zero (§ 2, Twierdzenie 1). Tenże jest jednak, z drugiej strony (§ 3, Def. 1) również,

$$= [\mathfrak{A}, \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \text{ itd.}] - [a_1, a_2, a_3 \text{ itd.}],$$

a więc (§ 2, Ustalenie) jest równy $\mathfrak{A} - A$. Wynika z tego, iż rzeczywiście

$$\mathfrak{A} = [a_1, a_2, a_3, \ldots].$$

Przykład. Ponieważ ułamki 0.1, 0.11, 0.111 itd. dochodzą nieskończenie blisko do liczby (wymiernej) $\frac{1}{9}$, a więc (porównaj uwagę do § 2, Wniosku 3)

$$\frac{1}{9} = [0.1, 0.11, 0.111 \, \text{itd.}].$$

2. *Definicja.* O znakach liczbowych $C_1, C_2,$ itd.$, C_n$ mówi się, że pozostają one poniżej każdej podanej wartości wraz ze wzrastającą n, gdy dla każdego różnego od zera znaku liczbowego D istnieje taka wartość dla n, że dla tej n oraz wszystkich dodatnich liczb całkowitych ν wartość liczbowa dla $C_{n+\nu}$ (§ 3, Def. 2) jest mniejsza od tej dla D.

Wniosek. Gdy przypadek powyższy zachodzi dla każdego D, to zachodzi to także dla każdej liczby wymiernej d, jako iż liczba wymierna jest szczególnym przypadkiem znaku liczbowego (§ 2, Ustalenie). Jednak również na odwrót: jeśli zachodzi to dla każdej liczby wymiernej d, to jest to przypadek dowolnego znaku liczbowego D. Jeśli mianowicie zachodzi to dla ustalonego D, którego wartość liczbowa jest równa $[d_1, d_2 \, \text{itd.}]$ i różna od zera, a więc także d_n pozostaje powyżej zera, to istnieje dodatnia liczba wymierna d, która jest mniejsza od wszystkich liczb d_m, począwszy od pewnej ustalonej m. Jeśli teraz wartości liczbowe dla $C_{n+\nu}$ pozostają poniżej d tak, że gdy taka wartość liczbowa jest przedstawiona jako $[c_1, c_2$ itd.$]$, to $d - c_m$ zawsze pozostaje dodatnia wraz ze wzrastającą m, to, ponieważ $d_m > d$, więc także $d_m - c_m$ pozostają dodatnie. *Wystarcza zatem, gdy kryterium jest spełnione dla wymiernych liczb D.*

3. *Definicja.* Jeśli A jest ustalonym znakiem liczbowym oraz $A - B_n$ pozostaje poniżej każdego znaku liczbowego wraz ze wzrastającą n, *to A nazywa się granicą owych B.*

2. *Twierdzenie. Znak liczbowy A jest granicą członów a ciągu, z którym jest on stowarzyszony.*

Dowód. Trzeba pokazać (§ 4, Def. 3), że $A - a_n$ pozostaje poniżej każdego podanego znaku liczbowego, a więc tylko (§ 4, Wniosek), że pozostaje ona poniżej każdej liczby wymiernej d. Otóż $A - a_n$ jest równa

$$[a_1 - a_n, a_2 - a_n \text{ itd.}, a_n - a_n, a_{n+1} - a_n \text{ itd.}],$$

lub (§ 2, Twierdzenie 2) jest równa

$$[a_{n+1} - a_n, a_{n+2} - a_n \text{ itd.}].$$

Jeśli weźmie się n wystarczająco dużą, to w przedstawionym wyrażeniu poszczególne człony szeregu pozostają pod d, a więc ten znak liczbowy leży poniżej $[d, d, d, \text{ itd.}]$, tj. poniżej d.

§ 5. Liczby niewymierne dowolnych rzędów

Oznaczenie. Liczby uogólnione, także w szczególnym przypadku, gdy są wymierne, będą nazywane liczbami niewymiernymi pierwszego rzędu. Tak jak te liczby niewymierne A pierwszego rzędu budowane są z liczb wymiernych, to z nich można z kolei tworzyć liczby niewymierne A' drugiego rzędu, a z tych liczby niewymierne A'' trzeciego rzędu itd. Liczby niewymierne $m+1$-ego rzędu będą oznaczane przez $A^{(m)}$.

Niewymierność, bez wskazania rzędu, przeciwstawiana jest wymierności. To, że istnieją liczby niewymierne, a więc że nie wszystkie wielkości $A^{(m)}$ muszą być wymierne, zostanie pokazane w części B, § 3, Wniosek 2.

Twierdzenie. Niewymierności $m + 2$-go rzędu nie są nowymi, ale są równe tym rzędu pierwszego.

Dowód[3]. Niech

$$A^{(m+1)} = [A_1^{(m)}, A_2^{(m)}, A_3^{(m)}, \ldots].$$

Dalej, niech a_1, a_2, a_3 itd. przedstawiają liczby wymierne, które leżą, odpowiednio, poniżej $A_1^{(m)}, A_2^{(m)}, A_3^{(m)}$ itd. oraz różnią się od nich, odpowiednio, o mniej niż $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ itd. Jeśli nazwie się A znak stowarzyszony z a_1, a_2, a_3 itd., to $A^{(m+1)} - A$ będzie znakiem ciągu elementarnego lub zera, tj. $A^{(m+1)}$ jest równy A.

[3]Zakłada się, że traktuje się niewymierności wyższych rzędów tak samo, jak wcześniej traktowano te rzędu pierwszego. Wypływają wtedy całkiem podobne zależności, które zakładam tu bez dalszego komentarza, gdyż ich rozwijanie byłoby w istocie powtórzeniem wcześniejszego materiału.

B. O Funkcjach

§ 1. Ogólnie o funkcjach

Definicja. Funkcją jednowartościową zmiennej x nazywa się wyrażenie, które dla każdej pojedynczej wymiernej lub niewymiernej wartości x jest jednoznacznie zdefiniowane.

Komentarz. Wartość funkcji dla niewymiernej wartości zmiennej nie może zatem być tak zdefiniowana, aby zależała od szczególnego ciagu liczbowego, przez który owa niewymierna wartość akurat była podana, *musi ona raczej pozostawać taka sama, co było też uzasadnione wybraniem jednego i tego samego znaku dla wartości niewymiernej x.*

1. *Twierdzenie.* Każda potęga całkowita x jest funkcją jednowartościową.

Dowód. Niech dowolna ustalona wartość x, wymierna lub niewymierna, nazwijmy ją X, będzie podana zarówno przez $[x_1, x_2$ itd.$]$, jak też przez $[y_1, y_2$ itd.$]$ równy temu samemu znakowi X[4], tak, że (A, § 2, Def. 2) $x_1 - y_1, x_2 - y_2$ itd., tworzą ciąg elementarny η_1, η_2 itd. Poprzez m-krotne mnożenie X przez siebie samego (A, § 3, Def. 1) otrzymujemy odpowiednio

$$[x_1^m, x_2^m \text{ itd.}], \qquad [y_1^m, y_2^m \text{ itd.}],$$

które to liczby są równe, ponieważ ich różnica

$$[(x_1 + \eta_1)^m - x_1^m, (x_2 + \eta_2)^m - x_2^m \text{ itd.}]$$

jest znakiem liczbowym ciągu elementarnego.

Wniosek. Każda tak zwana funkcja wielomianowa zmiennej x jest funkcją zmiennej x.

2. *Twierdzenie.* $\sin x$ oraz $\cos x$ są funkcjami x.

Dowód pierwszego stwierdzenia. Jako definicja $\sin x$ służy znany szereg potęgowy, który trzeba tak utworzyć, że $\sin x$ jest znakiem, który jest stowarzyszony z ciągiem liczbowym

$$x,\ x - \frac{x^3}{6},\ x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \text{ itd.}$$

Każdy człon, jakkolwiek daleko się idzie, jest funkcją wielomianową zmiennej x, a więc ma w pełni określoną wartość, niezależnie od powstania x. Jeśli człony ciągu liczbowego są w pełni określone, to taki jest też stowarzyszony z nim znak, a mianowicie $\sin x$.

Uwaga. Nie zostanie tu podany żaden środek, aby policzyć, powiedzmy przez przybliżenia, $\sin x$ dla niewymiernej wartości x, tworząc wartości przybliżone $\sin x_1$, $\sin x_2$ itd., gdzie x_1, x_2 itd. przedstawiają człony ciągu liczbowego dla wartości niewymiernej. Jak dotąd, nie zbadano tu, czy sinus tej wartości związany jest z $\sin x_1$, $\sin x_2$ itd. (por. B, § 2, Komentarz). Tak jak liczba niewymierna posiada w pełni określone znaczenie, również sinusowi każdej liczby przypisane jest takie znaczenie – tylko tyle dotąd udowodniono. Ma zatem sens, gdy *sumę szeregu Fouriera,*

[4] Na mocy rozszerzeń podanych w § 5 nie musimy już przez wielkości x oraz y rozumieć liczb wymiernych; mogą one wszystkie lub niektóre być niewymierne. Ponieważ w tym, co następuje chodzi tylko o funkcje, które są jednowartościowe, więc będzie zbytecznym dodawanie za każdym razem tego określenia.

w który rozwija się funkcja skończona, rozważa się *także w punktach skoku.* Obiekcja, że wartość funkcji tam nie istnieje, gdy odcięta, podzielona przez π jest liczbą niewymierną może tylko tak długo być uważana za uzasadnioną, dopóki nie przyda się niewymiernościom samodzielnej egzystencji. (Nadto, poprzez numeryczne obliczenie sumy, biorąc pod uwagę ograniczoną liczbę n członów zbliżymy się do średniej wartości funkcji, przy dowolnie dużej wartości argumentu przed lub za skokiem. Przybliżenie do wartości średniej można zwiększyć przez większą n tylko wtedy, gdy ustali się dla krytycznej odciętej niewymiernej taką wartość wymierną, która dochodzi wystarczająco blisko do prawdziwej wartości tejże).

§ 2. Warunki ciągłości

1. *Definicja.* Funkcja $f(x)$ nazywa się *ciągłą dla określonej pojedynczej wartości* $x = X$, gdy dla każdej dowolnie małej danej wielkości ε istnieje inna liczba dodatnia η_0 o takiej własności, że dla żadnej wielkości dodatniej η, która jest mniejsza od η_0, wartość liczbowa $f(X \pm \eta) - f(X)$ nie przekracza ε.

1. *Wniosek.* Dwie wartości funkcji dla argumentów x, które leżą między $X - \eta$ oraz $X + \eta$, mogą się różnić co najwyżej o 2ε.

Komentarz. Funkcja jest tylko agregatem pojedynczych wartości (A, § 1, Def.); związek między nimi, taki, iż jakaś wartość otrzymywana jest z wartości z otoczenia, ustanowiony jest dopiero poprzez warunki ciągłości.

1. *Twierdzenie*[5]. Jeśli funkcja $f(x)$ jest ciągła w $x = X$, to dla każdego ciągu liczbowego x_1, x_2 itd., który posiada znak X również $f(x_1), f(x_2)$ itd., tworzą ciąg liczbowy o znaku $f(X)$; *oraz na odwrót*, gdy dla każdego ciągu liczbowego x_1, x_2 itd., który posiada znak X również $f(x_1), f(x_2)$ itd., tworzą ciąg liczbowy o znaku $f(X)$, to $f(x)$ jest ciągła w $x = X$.

Dowód. Po pierwsze. Każdy ciąg liczbowy x_1, x_2 itd. daje się przedstawić za pomocą ciągu elementarnego $X + \eta_1, X + \eta_2$ itd. Jeśli teraz funkcja jest ciągła, to dla każdej danej wielkości ε (B, § 2, Def. 1) człony ciągu η_1, η_2 itd. będą pozostawać poniżej η_0, tak, że począwszy od pewnej wartości n, $f(X + \eta_n) - f(X)$, tj. $f(x_n) - f(X)$, nie przekracza już ε. Ponieważ ε można wziąć dowolnie małą, więc ta różnica jest ogólnym członem ciągu elementarnego $f(x_1) - f(X), f(x_2) - f(X)$ itd., którego znakiem liczbowym jest zero. Z drugiej strony jest to też (A, § 3, Def. 1) równe

$$[f(x_1), f(x_2) \text{ itd.}] - f(X),$$

przez co udowodniona jest pierwsza część twierdzenia, a mianowicie równość

$$f(X) = [f(x_1), f(x_2) \text{ itd.}].$$

[5]Twierdzenie mówiące, że funkcja jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy $f(X) - f(x_n)$ jest dowolnie mała dla każdego ciągu liczbowego dla X, wraz z jego dowodem, zapożyczam od Pana Cantora. Podczas gdy ja ograniczam się tu do funkcji jednej zmiennej, Pan Cantor rozważa ogólne funkcje większej liczby zmiennych; pokazuje on, że funkcje te posiadają ciągłość, którą ja w innym miejscu (ten *Journal*, Bd. **71**, s. 361) nazywam jednostajną, gdy spełniają one pewne warunki *w każdym pojedynczym punkcie.* Ogólny przebieg dowodu niektórych twierdzeń w § 3 wedle zasad Pana Weierstrassa znam z jego własnych, Panów Schwarza oraz Cantora, ustnych omówień, tak, że w tych dowodach jedynie poprowadzenie pewnych drobiazgów pochodzi ode mnie.

Po drugie. Jeśli teraz funkcja spełnia wcześniej postawiony warunek, który mówi, że dla każdego ciągu liczbowego x_1, x_2 itd., bez jakiegokolwiek wyjątku, którego znakiem liczbowym jest X, $f(x_1) - X, f(x_2) - X$ itd. stają się dowolnie małe, to z tego wynika jej ciągłość. Gdyby bowiem było tak, że gdy ustali się określoną liczbę ε (B, § 2, Def. 1) oraz weźmie się jakkolwiek małą liczbę η_0 i nigdy nie będzie spełniony warunek ciągłości, to zawsze będą istniały wartości η poniżej η_0, dla których $f(X+\eta) - f(X)$ pozostaje ponad ε. Niech więc dla jakiejkolwiek wielkości η_0 taka wartość η (poniżej tego η_0), dla której powyższa różnica nie jest mniejsza od ε, będzie równa η'. Dla połowy tak dużej wartości η_0 ta różnica przy $\eta = \eta''$ nie może być mniejsza od ε; dla η_0 równej połowie poprzedniej (ćwierci pierwszej) będzie tak dla $\eta = \eta'''$ itd. Ponieważ wartości η_0 tworzą ciąg elementarny, więc ten sam przypadek ma miejsce z (mniejszymi) η', η'', η'''; a zatem $X + \eta', X + \eta''$ itd. przedstawiają ciąg liczbowy x_1, x_2 itd. o znaku X, lecz $f(x_1) - X, f(x_2) - X$ itd. nie pozostają jednak poniżej ε – wbrew założeniu.

2. *Twierdzenie.* Funkcja ciągła $f(x)$ jest znana dla każdego x, gdy jest podana dla każdej wymiernej wartości tej zmiennej.

Dowód. Niech X będzie wielkością niewymierną daną przez ciąg x_1, x_2, x_3 itd.; dalej, niech y_1, y_2, y_3 itd. przedstawiają liczby wymierne, które różnią się od x_1, x_2, x_3 itd. o mniej niż $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ itd. Ponieważ owe x różnią się od równoimiennych y tylko członami ciągu elementarnego, więc również (A, § 2, Def. 2) X jest równy $[y_1, y_2,$ itd.$]$, zatem (B, § 2, Twierdzenie 1) wynika z tego

$$f(X) = [f(y_1), f(y_2) \text{ itd.}].$$

3. *Twierdzenie.* Każda całkowita potęga x^m jest ciągła dla każdej pojedynczej wartości $x = X$.

Dowód. Niech znowu $X = [x_1, x_2$ itd.$]$, z czego wynika (A, § 3, Def. 1), że

$$X^m = [x_1^m, x_2^m, \ldots].$$

To jest jednak (B, § 2, Twierdzenie 1) warunek ciągłości dla funkcji $f(x) = x^m$ w X.

2. *Wniosek.* Każda funkcja wielomianowa jest ciągła dla każdej pojedynczej wartości zmiennej.

4. *Twierdzenie.* $\sin x$ jest ciągła dla każdej pojedynczej wartości $x = X$.

Dowód. Trzeba dowieść, że $\sin x_1, \sin x_2$ itd. tworzą ciąg liczbowy oraz, po wtóre, że znakiem tegoż ciągu jest $\sin x$. Obydwie rzeczy wynikają, gdy się pokaże, że ciąg $\sin X - \sin x_1, \sin X - \sin x_2$ itd. jest elementarny. W istocie, $\sin X - \sin x_n$ lub

$$X - x_n, X - x_n - \frac{X^3 - x_n^3}{6} \text{ itd.}$$

staje się dowolnie małe wraz ze wzrastającą n.

§ 3. Własności funkcji ciągłych

1. *Definicja.* Funkcja $f(x)$ nazywa się *ciągłą* od $x=a$ do $x=b$, gdy jest ona ciągła (B, § 2, Def. 1) dla każdej pojedynczej wartości $x = X$ między $x=a$ oraz $x = b$, z włączeniem wartości a i b; nazywa się ona *jednostajnie ciągłą* od $x = a$ do $x = b$, gdy dla każdej jakkolwiek małej wielkości ε istnieje taka wielkość dodatnia η_0, że dla wszystkich wielkości dodatnich, które są mniejsze od η_0, $f(x \pm \eta) - f(x)$ pozostaje poniżej ε. Jakąkolwiek też wartość przyjąć może x, jedynie przy założeniu, iż x oraz $x \pm \eta$ należą do dziedziny od a do b, to żądany warunek musi być spełniony przez *tę samą* η_0.

1. *Twierdzenie.* Każda potęga całkowita x jest jednostajnie ciągła między jakimikolwiek podanymi granicami.

Dowód. Ponieważ $(x \pm \eta)^m - x^m$ w każdym przypadku pozostaje poniżej iloczynu η oraz ustalonej wielkości z podanej dziedziny, więc różnica ta daje się oczywiście dla wszystkich x poprzez tę samą η uczynić dowolnie małą.

1. *Wniosek.* Każda funkcja wielomianowa jest jednostajnie ciągła między dowolnymi danymi granicami.

2. *Twierdzenie.* Jeśli funkcja $f(x)$ ciągła (dla każdego poszczególnego x) od a do b posiada dla dwóch liczb $x = x_1$ oraz $x = x_2$ leżących między a oraz b przeciwne znaki, to znika ona dla pewnej leżącej pomiędzy nimi wartości x.

Dowód[6]. Niech $x_2 - x_1 = \delta$ oraz $f(x_1)$ będą dodatnie. Tworzy się teraz liczby

$$x_3 = x_2 - \frac{\delta}{2}, \quad x_4 = x_3 \pm \frac{\delta}{4}, \quad x_5 = x_4 \pm \frac{\delta}{8},$$

ogólnie

$$x_{n+1} = x_n \pm \frac{\delta}{2^{n-1}},$$

i przy tworzeniu x_{n+1} z x_n mamy znak dodatni lub ujemny, w zależności od tego, czy $f(x_n)$ ma znak dodatni lub ujemny; – jeśli wartość funkcji $f(x_n)$ jest dla jakiejkolwiek n zerem, to twierdzenie nie potrzebuje dalszego dowodu, dlatego ten przypadek pozostaje wykluczony.

Liczby x_1, x_2 itd. tworzą ciąg liczbowy, ponieważ (A, § 1, Def. 1) $x_{n+\nu} - x_n$, jak wynika z poprzednich równań na mocy całkiem elementarnych rachunków, nawet w najbardziej niedogodnym przypadku, a mianowicie gdy wartości funkcji dla x_{n-1}, x_n itd., $x_{n+\nu-1}$ wszystkie posiadają ten sam znak, wraz ze wzrastającą n stają się dowolnie małe. Niech znakiem liczbowym tego ciągu liczbowego będzie X; pokażę, że $f(X)$ jest zerem.

Gdyby nie było to zerem, to jest to określona liczba, którą nazwę 4ε. Tworzy się teraz taką wielkość η_0, że $f(X \pm \eta) - f(X) < \varepsilon$ (B, § 2, Def. 1) oraz bierze n tak dużą, że x_n, x_{n+1} itd. różnią się od X o mniej niż η_0, przez co $f(X)$ różni się od $f(x_n), f(x_{n+1})$ itd. o mniej niż ε. Wtedy różnica $f(x_n) - f(x_{n+\nu})$ jest mniejsza od 2ε. Jeśli teraz weźmie się ν tak dużą, że $f(x_n)$ oraz $f(x_{n+\nu})$ mają przeciwne znaki (to, że zawsze można to osiągnąć, zostanie pokazane niżej), to jest oczywiste, że sama $f(x_n)$ jest mniejsza od 2ε, a więc $f(X)$ jest mniejsza od 3ε, a zatem nie jest równa 4ε.

---

[6]Wydaje się celowe, nawet kosztem zwięzłości, wykluczyć w dowodzie przedstawienia geometryczne.

Gdyby jednak, jakąkolwiek weźmie się liczbę ν dla określonej n, $f(x_{n+\nu})$ utrzymywała zawsze ten sam znak jak przy x_n, to niech x_m będzie tą liczbą ciągu o najmniejszym indeksie, począwszy od którego znaki funkcji $f(x)$ już się nie zmieniają, tak, że pozostają one takie same dla x_m, x_{m+1} itd. Ponieważ $f(x_1)$ oraz $f(x_2)$ posiadają przeciwne znaki, więc m jest równa co najmniej 2; w konsekwencji $f(x_{m-1})$ oraz $f(x_m)$ z pewnością mają przeciwne znaki. Jeśli α oznacza dodatnią lub ujemną jednostkę, w zależności od tego, czy $f(x_{m-1})$ jest dodatnia, czy ujemna, to przy tych założeniach będzie

$$x_m = x_{m-1} + \alpha\delta 2^{2-m}, \quad x_{m+1} = x_m - \alpha\delta 2^{1-m}, \quad x_{m+2} = x_{m+1} - \alpha\delta 2^{-m} \quad \text{itd.}$$

a w konsekwencji

$$x_{m+\mu} - x_{m-1} = -\alpha\delta 2^{2-m}\left(-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^\mu}\right).$$

Wraz ze wzrastającą μ strona prawa, która posiada znak α, pozostaje poniżej każdego stopnia małości, tak, że znak liczbowy X powyżej zbudowanego ciągu liczbowego byłby równy dokładnie x_{m-1}. Ogólny człon x_n tego szeregu liczbowego zbliżałby się zatem dowolnie blisko do x_{m-1}, a przy tym całkowicie określona wielkość $f(x_{m-1})$ miałaby znak α, a $f(x_n)$ znak przeciwny. Na mocy ciągłości $f(x)$ nie jest to możliwe.

2. *Wniosek.* Skoro tylko a oznacza dodatnią liczbę całkowitą, niebędącą pełnym kwadratem, to równanie $x^2 - a = 0$ nie ma żadnego całkowitego, a w konsekwencji żadnego wymiernego pierwiastka. Jednak lewa strona ma dla pewnych różnych wartości x przeciwne znaki, a więc równanie ma pierwiastek niewymierny. Dowodzi to, że nie wszystkie znaki liczbowe redukują się do liczb wymiernych, lecz *że istnieją także liczby niewymierne* (A, § 5).

3. *Twierdzenie.* Funkcja $f(x)$, która od $x = a$ do $x = b$ jest tego rodzaju, że między każdymi dwiema liczbami x_1 oraz x_2, jakkolwiek blisko siebie wybranymi, leżą też inne, dla których $f(x)$ posiada różne znaki, jest nieciągła.

Dowód. Gdyby była ona ciągła, to niech ma ona wartość równą 2ε dla ustalonej wartości ξ dla x. Można wtedy ustalić wielkość η_0 tak, że

$$f(\xi \pm \eta) - f(\xi) < \varepsilon,$$

dla każdej wartości η poniżej η_0. Między $x = \xi$ a $x = \xi + \eta_0$ funkcja $f(x)$ zmienia znak, a więc musi pomiędzy nimi, dla wartości $x = \xi + \eta$ znikać (B, § 3, Twierdzenie 2), a więc $f(\xi)$ różni się od zera najwyżej o ε, a zatem nie może być równa 2ε.

4. *Twierdzenie.* Gdy funkcja $f(x)$ ciągła (dla każdego poszczególnego x) od $x = a$ do $x = b$ nigdy nie jest ujemna, ale jest w tych granicach mniejsza od każdej podanej wartości, to *osiąga* ona także wartość zero.

Dowód. Ponieważ $f(x)$ dla każdego ustalonego x posiada też ustaloną wartość, więc może dla takiego x tylko wtedy być mniejsza od każdej podanej wielkości, gdy tam znika. Niech teraz x_1 oraz x_2 będą dwiema liczbami tego rodzaju, że leżą między nimi inne, dla których $f(x)$ staje się dowolnie mała; jeśli zachowa się oznaczenie z dowodu drugiego twierdzenia, a więc utworzy liczby x_3, x_4 itd. poprzez wprowadzone tam formuły rekurencyjne, w których o wyborze pozostawionego nieokreślonym znaku ma jeszcze decydować najbliższe otoczenie, to mogą najpierw $x = x_3$ lub $x = x_4$ itd., $x = x_n$ być tymi miejscami, w których $f(x)$ staje się dowolnie mała. Wtedy jednak znika ona w tych miejscach, co jest widoczne z przebiegu owego dowodu i twierdzenie byłoby udowodnione. Chodzi zatem jedynie o dowód, gdy funkcja nie znika ani dla x_3, ani dla x_4 itd., jakkolwiek wiele można byłoby tworzyć tych liczb.

Liczby x, dla których $f(x)$ staje się dowolnie mała, są albo większe od x_3, albo mniejsze od x_3, albo po części większe, a po części mniejsze. W pierwszym przypadku tworzy się x_4 za pomocą znaku dodatniego, w drugim za pomocą ujemnego, w trzecim, jak dowolnie zostaje postanowione, za pomocą dodatniego. W podobny sposób x_5 zostaje utworzone z x_4 itd., tak, że powstaje ciąg liczbowy x_1, x_2 itd. o znaku liczbowym X; pokażę, że $f(X)$ jest zerem.

Gdyby nie było to zerem, lecz 3ε, to tworzy się, jak w drugim twierdzeniu, η_0 i bierze n tak dużą jak tamże, tj. tak dużą, że x_n, x_{n+1} itd. różnią się o mniej niż η_0 od X. Jeśli teraz x_n oraz $x_{n+\nu}$ są wartościami, między którymi leżą liczby x, dla których $f(x)$ staje się dowolnie mała, np. $< \varepsilon$, to $f(X)$, która różni się o mniej niż ε od wszystkich liczb $f(x)$, gdzie $X - \eta_0 < x < X + \eta_0$, może być równa najwyżej 2ε, a nie 3ε. Gdyby jednak nie istniała żadna ν, gdyby więc można było od x_n zawsze przechodzić do większych lub zawsze do mniejszych wartości x_{n+1}, x_{n+2} itd., to niech x_m będzie najmniejszym z tych do utworzenia x, które, odpowiednio, posiadają mniejszą lub większą wartość od poprzedniej; wtedy x_{m+1}, x_{m+2} itd. są wszystkie, odpowiednio, większe lub mniejsze od x_m i tworzą rosnący lub malejący ciąg członów, które jednak zawsze pozostają albo poniżej, albo powyżej x_{m-1}. Za pomocą takiego samego rachunku jak w odpowiednim przypadku w twierdzeniu drugim znajduje się $X = x_{m-1}$. Podczas gdy $f(X) = f(x_{m-1})$ posiada określoną wartość 3ε, $f(x)$ musiałaby być dowolnie mała dla tych wartości x, które leżą dowolnie blisko x_{m-1}, a mianowicie pomiędzy $X = x_{m-1}$ oraz x_n, jakkolwiek dużą weźmie się n. To jednak jest niemożliwe, z uwagi na ciągłość $f(x)$.

3. *Wniosek.* Gdy funkcja ciągła (dla wszystkich poszczególnych wartości) od $x = a$ do $x = b$ nie wszędzie ma równe wartości, to osiąga ona dla określonej wartości x maksimum, jak również minimum.

5. *Twierdzenie.* Gdy funkcja $f(x)$ ciągła (dla wszystkich poszczególnych wartości) od $x = a$ do $x = b$ nie jest dodatnia jakkolwiek blisko każdej poszczególnej wartości, która leży między a oraz wymierną lub niewymierną liczbą X, gdzie $a < X < b$, ale powyżej X jest dodatnia, to $f(X) = 0$.

Dowód. Niech x_1, x_2 itd. będzie ciągiem liczbowym dla X, którego człony wszystkie leżą poniżej X. Wtedy

$$f(X) = [f(x_1), f(x_2) \text{ itd.}]$$

nie jest dodatnia; nie może być ujemna ze względu na ciągłość $f(x)$, ponieważ wtedy posiadałaby określoną daną różną od zera wartość ujemną, podczas gdy sama $f(x)$, zgodnie z założeniem, jest dodatnia dla najmniejszej wartości, która czyni x większym od X. Pozostaje zatem tylko to, że $f(X)$ jest zerem.

6. *Twierdzenie.* Funkcja $f(x)$ ciągła (dla wszystkich poszczególnych wartości) od $x = a$ do $x = b$ jest też jednostajnie ciągła (B, § 3, Def. 1).

Dowód. Jeśli 3ε oznacza dowolną wielkość, to istnieje taka liczba, że od $x = a$ aż do niej $f(x) - f(a)$ jest bezwzględnie $\leqslant 3\varepsilon$. Wartość, która to zapewnia, jest największa i czyni jednocześnie zadość $f(x)-f(a)-3\varepsilon=0$. (B, § 3, Twierdzenie 5). Niech tą wartością będzie x_1. W podobny sposób znajduje się liczbę x_2, jako największą, która zapewnia, że od $x = x_1$ do $x = x_2$ zawsze $f(x) - f(x_1) \leqslant 3\varepsilon$. Postępuje się w ten sposób dalej; jeśli po skończonej liczbie n operacji dojdzie się do $x_n = b$ lub wykryje, że $f(x) - f(x_{n-1})$ nie przekracza 3ε od $x = x_{n-1}$ do $x = b$, to twierdzenie jest udowodnione.

Pozostaje jeszcze przypadek, że nie istnieje żadna taka n, a więc że wielkości x_1, x_2 itd. tworzą nieskończony ciąg wartości rosnących, które leżą poniżej b. Ten ciąg byłby wtedy ciągiem liczbowym, którego znakiem liczbowym niech będzie X; podkreślić należy jego własność, wedle której dla każdej n zachodzi równanie: $f(x_{n+1}) - f(x_n) = 3\varepsilon$. Niech teraz η_0 będzie liczbą o tej własności, że $f(X)$ różni się od $f(X - \eta)$ o mniej niż ε, jak długo $\eta < \eta_0$. Między liczby $X - \eta_0$ oraz X mogą wpadać liczby powyższego ciągu liczbowego x_n, x_{n+1} itd., tak, że (B, § 2, Wniosek 1) $f(x_{n+1}) - f(x_n)$ byłaby mniejsza od 2ε, podczas gdy, z drugiej strony, musiałaby ona być równa 3ε. Leżące u podstaw założenie jest zatem niemożliwe, a zatem funkcja jest jednostajnie ciągła.

Halle, w październiku 1871.

* * *

Podstawa tłumaczenia: Heine, E.: 1872, Elemente der Functionenlehre, *Journal fur die reine und angewandte Mathematik* **74**, 172-188.

Tłumaczenie: Jerzy Pogonowski
1 listopada 2010