FOLIA 231

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia 9(2017)

ISSN 2080-9751
DOI 10.24917/20809751.9.9

Richard Dedekind

Ciągłość i Liczby Niewymierne*

Spis Treści

Dedykowane mojemu ukochanemu Ojcu,
Tajnemu Radcy Dworu
Prof. Dr. jur. Juliusowi Levinowi Ulrichowi Dedekindowi
w Braunschweig
z okazji jubileuszu pięćdziesięciolecia sprawowania urzędu
26 kwietnia 1872

*Continuity and irrational numbers

Ciągłość i Liczby Niewymierne

Richard Dedekind

Przedmowa

Rozważania stanowiące przedmiot niniejszej niewielkiej rozprawy pochodzą z jesieni 1858 roku. Wtedy to, jako profesor Politechniki w Zurychu, po raz pierwszy znalazłem się w sytuacji, gdy musiałem wykładać elementy rachunku różniczkowego i bardziej dotkliwie niż kiedykolwiek wcześniej odczuwałem brak rzeczywiście naukowych podstaw arytmetyki. Przy omawianiu zbliżania się wielkości zmiennej do ustalonej wartości granicznej, a konkretnie w dowodzie twierdzenia, że każda wielkość, która wzrasta stale, lecz nie w sposób nieograniczony, musi zbliżać się do pewnej wartości granicznej, uciekałem się do świadectw geometrycznych. Nawet teraz uważam takie odwołanie do intuicji geometrycznych we wstępnym wykładzie rachunku różniczkowego za nad wyraz pożyteczne z dydaktycznego punktu widzenia, a nawet wręcz niezbędne, gdy nie chce się tracić zbyt wiele czasu. Nikt jednak nie zaprzeczy, iż taki sposób wprowadzenia do rachunku różniczkowego nie może rościć sobie żadnych praw do bycia naukowym. To poczucie dyskomfortu było wtedy dla mnie tak przytłaczające, że powziąłem mocną decyzję, aby rozmyślać tak długo, aż uda mi się odnaleźć czysto arytmetyczne i w pełni precyzyjne podstawy dla zasad analizy infinitezymalnej. Jakże często mówi się, że rachunek różniczkowy zajmuje się wielkościami ciągłymi, a jednak nigdzie nie przedstawia się wyjaśnienia tej ciągłości i nawet najbardziej precyzyjne przedstawienia rachunku różniczkowego nie opierają swoich dowodów na ciągłości, lecz albo apelują mniej lub bardziej świadomie do wyobrażeń geometrycznych lub sugerowanych przez geometrię, albo zależą od takich twierdzeń, które same nigdy nie są dowodzone na sposób arytmetyczny. Należy do nich na przykład przywołane wyżej twierdzenie, a dokładne badania przekonały mnie, że to twierdzenie, lub jakiekolwiek z nim równoważne, w pewien sposób może być uważane za wystarczającą podstawę dla analizy infinitezymalnej. Chodziło tylko jeszcze o to, aby wykryć jego właściwe źródło w elementach arytmetyki i przez to jednocześnie uzyskać rzeczywistą definicję istoty ciągłości. Udało mi się to 24 listopada 1858 roku, a parę dni później podzieliłem się wynikami moich przemyśleń z moim drogim przyjacielem Durège, co doprowadziło do długiej i ożywionej rozmowy. Później przedstawiłem także niektórym moim uczniom te przemyślenia na temat naukowych podstaw arytmetyki, a tu w Braunschweig miałem również odczyt w profesorskim towarzystwie naukowym, nie mogłem się jednak zdecydować na publikację, ponieważ, po pierwsze przedstawienie tematu nie jest całkiem łatwe, po drugie rzecz ta jest tak mało owocna. I gdy tak rozmyślałem, czy może jednak wybrać ten temat jako przedmiot tej okolicznościowej publikacji, oto przed kilkoma dniami, 14 marca, trafiła w moje ręce, dzięki uprzejmości jej szanownego autora, rozprawa E. Heine'go *Die Elemente der Functionenslehre* (*Crelle's Journal*, tom 74), co umocniło mnie w mojej decyzji. W istocie zgadzam się co prawda w zupełności z treścią tej rozprawy, bo przecież nie może być inaczej, ale szczerze wyznam, że moje przedstawienie wydaje się prostsze w formie i bardziej precyzyjne w ujęciu zasadniczej kwestii. Podczas pisania tej przedmowy (20 marca 1872 roku) otrzymałem interesującą rozprawę G. Cantora *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* (*Mathematische Annalen*, tom 5), za którą uprzejmie dziękuję jej wnikliwemu autorowi. Pobieżne przejrzenie tej pracy pozwala na stwierdzenie, że aksjomat 2 w jej §2, pomijając zewnętrzną postać sformułowania, w pełni zgodny jest z tym, co poniżej w §3 oznaczam jako istotę ciągłości. Jakie korzyści, choćby tylko czysto pojęciowe, mogłoby przynieść rozróżnienie rzeczywistych wielkości liczbowych jeszcze wyższego typu nie potrafię jeszcze rozpoznać, wychodząc od mojego ujęcia dziedziny liczb rzeczywistych jako w sobie zupełnej.

§1. Własności liczb wymiernych

Choć zakłada się tutaj rozwiniętą arytmetykę liczb wymiernych, to uważam za właściwe przywołać bez dyskusji pewne jej ważne punkty, aby wprzódy określić stanowisko, które przyjmuję w dalszym ciągu. Uważam całą arytmetykę za konieczną, lub co najmniej naturalną konsekwencję najprostszego aktu arytmetycznego, liczenia, a samo liczenie nie jest niczym innym jak tworzeniem w kolejnych krokach nieskończonego ciągu całkowitych liczb dodatnich, w którym każde indywiduum jest definiowane poprzez indywiduum bezpośrednio je poprzedzające; ten najprostszy akt jest przejściem od już stworzonego indywiduum do mającego zostać stworzonym indywiduum po nim następującego. Łańcuch tych liczb już sam w sobie tworzy niezwykle użyteczny dla ludzkiego umysłu instrument i oferuje niewyczerpane bogactwo osobliwych praw, do których dochodzi się poprzez wprowadzenie czterech podstawowych operacji arytmetycznych. Dodawanie jest zebraniem w pojedynczy akt dowolnego powtórzenia powyższego najprostszego aktu, a z niego w podobny sposób powstaje mnożenie. Podczas gdy te dwie operacje są zawsze wykonalne, operacje odwrotne, odejmowanie i dzielenie, cechują się tylko ograniczoną dopuszczalnością. Pozostawmy teraz na uboczu jakiekolwiek okoliczności, porównania lub analogie z doświadczeniem oraz intuicje; to właśnie ta ograniczoność stosowania tych odwrotnych [indirekten] operacji jest w każdym przypadku właściwym powodem nowego aktu tworzenia; tak zostały stworzone przez umysł ludzki liczby ujemne oraz ułamki, a w systemie wszystkich liczb wymiernych uzyskano instrument o nieskończenie większej doskonałości. Ten system, który będę oznaczał przez R, posiada przede wszystkim własność zupełności oraz zamkniętości, którą w innym miejscu[1] określiłem jako wyróżnik *ciała liczbowego*, a która polega na tym, że te cztery operacje wykonalne są zawsze na

[1] *Vorlesungen über Zahlentheorie*, P.G. Lejeune Dirichlet, wydanie drugie, §159.

dowolnych dwóch elementach R, tj. że ich wynik zawsze daje określony element w R, o ile wykluczy się pojedynczy przypadek dzielenia przez liczbę zero.

Dla naszego najbliższego celu jeszcze ważniejsza jest jednak inna własność systemu R, którą można wyrazić przez to, że system R tworzy uporządkowaną [wohlgeordnetes], z obu przeciwległych stron nieskończoną dziedzinę jednowymiarową. Co należy przez to rozumieć jest wystarczająco objaśnione przez wybór wyrażeń, które zapożyczone są z wyobrażeń geometrycznych; jest jednak tym bardziej konieczne uwydatnienie odpowiednich własności czysto arytmetycznych, również po to, aby oddalić pozór, iż arytmetyka potrzebuje takich obcych jej wyobrażeń.

Aby wyrazić to, że znaki a i b oznaczają jedną i tę samą liczbę wymierną, piszemy zarówno $a = b$, jak też $b = a$. Różność dwóch liczb wymiernych a, b widoczna jest w tym, że różnica $a - b$ ma albo wartość dodatnią, albo ujemną. W pierwszym przypadku mówi się, że a jest *większa* od b, b jest *mniejsza* od a, co też zaznaczane będzie symbolami $a > b$, $b < a$[2]. Ponieważ w drugim przypadku $b - a$ ma wartość dodatnią, więc jest wtedy $b > a$, $a < b$. Ze względu na tę podwójną możliwość w sposobie różnienia się liczb, zachodzą następujące prawa.

I. Jeśli $a > b$ oraz $b > c$, to $a > c$. Chcemy, aby za każdym razem, gdy a, c są dwiema różnymi (lub nierównymi) liczbami oraz gdy b jest większa od jednej z nich, a mniejsza od drugiej, bez obaw o uleganie sugestiom ze strony pojęć geometrycznych móc to krótko wyrazić tak: b leży pomiędzy obydwiema liczbami a, c.

II. Jeśli a, c są dwiema różnymi liczbami, to zawsze jest nieskończenie wiele różnych liczb b, które leżą pomiędzy a, c.

III. Jeśli a jest określoną liczbą, to wszystkie liczby systemu R wpadają do dwóch klas, A_1 oraz A_2, z których każda ma nieskończenie wiele indywiduów; pierwsza klasa A_1 obejmuje wszystkie liczby a_1, które są $< a$, druga klasa A_2 obejmuje wszystkie liczby a_2, które są $> a$; sama liczba a może zostać dowolnie przypisana do pierwszej lub drugiej klasy i jest wtedy, odpowiednio, największą liczbą w pierwszej klasie lub najmniejszą liczbą w klasie drugiej. W każdym razie, rozkład systemu R na dwie klasy A_1 i A_2 jest tego rodzaju, że każda liczba z pierwszej klasy A_1 jest mniejsza od każdej liczby z drugiej klasy A_2.

§2. Porównanie liczb wymiernych z punktami linii prostej

Przywołane wyżej własności liczb wymiernych przypominają wzajemne relacje położeń punktów linii prostej L. Jeśli oba istniejące w niej przeciwne kierunki odróżnimy jako „prawy” oraz „lewy” i jeśli p, q są dwoma różnymi punktami, to albo p leży na prawo od q i jednocześnie q leży na lewo od p, albo odwrotnie, q leży na prawo od p, a p leży jednocześnie na lewo od q. Niemożliwy jest trzeci

[2] Tak więc, w dalszym ciągu mamy na myśli większość oraz mniejszość „algebraiczną”, o ile nie zostanie dodane słowo „absolutna”.

przypadek, o ile rzeczywiście p, q są różnymi punktami. Ze względu na te różnice położenia zachodzą następujące prawa.

I. Jeśli p leży na prawo od q, a q na prawo od r, to także p leży na prawo od r; mówimy, że q leży między punktami p oraz r.

II. Jeśli p, r są dwoma różnymi punktami, to zawsze jest nieskończenie wiele punktów q, które leżą między p oraz r.

III. Jeśli p jest ustalonym punktem na L, to wszystkie punkty na L wpadają do dwóch klas P_1, P_2, z których każda zawiera nieskończenie wiele indywiduów; pierwsza klasa P_1 obejmuje te wszystkie punkty p_1, które leżą na lewo od p, a druga klasa P_2 obejmuje te wszystkie punkty, które leżą na prawo od p; sam punkt p może zostać dowolnie przypisany do pierwszej lub drugiej klasy. W każdym przypadku rozkład linii prostej L na klasy lub kawałki P_1, P_2 jest tego rodzaju, że każdy punkt pierwszej klasy P_1 leży na lewo od każdego punktu drugiej klasy P_2.

Ta analogia między liczbami wymiernymi a punktami linii prostej staje się, jak wiadomo, rzeczywistą odpowiedniością, jeśli wybierzemy na prostej ustalony punkt początkowy lub zerowy o oraz wybierzemy jakąś określoną jednostkę długości dla mierzenia odcinków. Za pomocą tej ostatniej można dla każdej liczby wymiernej a skonstruować odpowiednią długość i jeżeli odłożymy ją na linii prostej na prawo lub lewo od punktu o, w zależności od tego, czy a jest dodatnia czy ujemna, to otrzymamy pewien określony punkt końcowy p, który możemy uważać za odpowiadający liczbie a; liczbie wymiernej zero odpowiada punkt o. W ten sposób każdej liczbie wymiernej a, tj. każdemu indywiduum w R, odpowiada jeden i tylko jeden punkt p, tj. indywiduum w L. Jeśli dwóm liczbom a, b odpowiadają, odpowiednio, dwa punkty p, q oraz $a > b$, to p leży na prawo od q. Prawom I, II i III z poprzedniego punktu w pełni odpowiadają prawa I, II i III z niniejszego punktu.

§3. Ciągłość linii prostej

Najważniejszy jednakże jest teraz fakt, że na prostej L jest nieskończenie wiele punktów, które nie odpowiadają żadnej liczbie wymiernej. Jeśli mianowicie punkt p odpowiada liczbie wymiernej a, to, jak wiadomo, długość op jest współmierna z użytą w konstrukcji niezmienną jednostką długości, tj. istnieje trzecia długość, tak zwana wspólna miara, której całkowitymi wielokrotnościami są obie te długości. Ale już starożytni Grecy wiedzieli i udowodnili, że istnieją długości, które nie są współmierne z daną jednostką długości, np. przekątna kwadratu, którego bok jest jednostką długości. Jeśli odłożymy taką długość od punktu o na prostej, to otrzymamy punkt końcowy, który nie odpowiada żadnej liczbie wymiernej. Dalej, ponieważ łatwo udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele długości, które nie są współmierne z jednostką długości, więc możemy stwierdzić: prosta L jest nieskończenie bogatsza w indywidua punktowe niż dziedzina R liczb wymiernych w indywidua liczbowe.

Jeśli teraz chcemy, a to właśnie jest nasze życzenie, oddać na sposób arytmetyczny wszystkie zjawiska na prostej, to liczby wymierne do tego nie wystarczą, a stąd jest bezwarunkowo konieczne, aby instrument R, który został skonstruowany poprzez stworzenie liczb wymiernych, uczynić istotnie subtelniejszym poprzez stworzenie nowych liczb tego rodzaju, by owa dziedzina liczbowa uzyskała tę samą zupełność, lub, jak chcemy teraz powiedzieć, tę samą *ciągłość*, co linia prosta.

Dotychczasowe rozważania są wszystkim tak dobrze znane, że wielu uzna ich powtarzanie za zbyteczne. Jednakże uważam tę rekapitulację za konieczną, aby należycie przygotować główne pytanie. Zwykłe jak dotąd wprowadzenie liczb niewymiernych wiąże się mianowicie bezpośrednio z pojęciem wielkości rozciągłej – które samo jednak nie jest nigdzie precyzyjnie zdefiniowane – i objaśnia liczbę jako wynik mierzenia jednej takiej wielkości przez drugą tego samego rodzaju[3]. Zamiast tego żądam, aby arytmetyka była rozwijana sama z siebie. Można w ogólności przyznać, że takie odwołania do pojęć niearytmetycznych dostarczały okazji do rozszerzania pojęcia liczby (choć zdecydowanie nie było tak w przypadku wprowadzenia liczb zespolonych); w tym jednak z pewnością nie leży powód, aby tego rodzaju obce rozważania wprowadzać do samej arytmetyki, nauki o liczbach. Tak jak liczby ujemne oraz ułamki wymierne wprowadzane są w swobodnym akcie twórczym i jak prawa rachowania na tych liczbach muszą i mogą być sprowadzone do praw rachowania na dodatnich liczbach całkowitych, tak też należy dążyć do tego, aby liczby niewymierne zostały w pełni zdefiniowane wyłącznie poprzez liczby wymierne. Pozostaje tylko pytanie, jak to zrobić.

Powyższe porównanie dziedziny R liczb wymiernych z linią prostą doprowadziło do rozpoznania w tej pierwszej istnienia luk, niezupełności lub nieciągłości, podczas gdy linii prostej przypisujemy zupełność, brak luk lub ciągłość. Na czym właściwie polega owa ciągłość? Wszystko zawarte musi być w odpowiedzi na to pytanie i tylko przez nią uzyska się naukową podstawę dla badania *wszystkich* dziedzin ciągłych. Nie uzyskamy naturalnie niczego mglistymi uwagami o nierozerwalnym połączeniu najmniejszych części; chodzi o to, aby podać precyzyjny wyróżnik ciągłości, który może zostać użyty jako podstawa rzeczywistych dedukcji. Przez długi czas daremnie o tym rozmyślałem, lecz w końcu znalazłem to, czego szukałem. Odkrycie będzie być może różnie oceniane przez różne osoby, sądzę jednak, że większość z nich uzna jego treść za bardzo trywialną. Sprowadza się ono do rzeczy następującej. W poprzednich paragrafach zwracano uwagę na to, że każdy punkt p linii prostej dostarcza rozkładu tej ostatniej na dwa kawałki tego rodzaju, iż każdy punkt jednego z kawałków leży na lewo od każdego punktu drugiego kawałka. Istotę ciągłości odnajduję w czymś odwrotnym, a więc w następującej zasadzie:

„Jeśli wszystkie punkty linii prostej wpadają do dwóch klas tego rodzaju, że każdy punkt pierwszej klasy leży na lewo od każdego punktu klasy drugiej, to istnieje jeden i tylko jeden punkt, który dostarcza tego podziału wszystkich punktów na dwie klasy, tego rozcięcia linii prostej na dwa kawałki".

[3] Pozorna korzyść ogólności tej definicji znika natychmiast, gdy pomyśli się o liczbach zespolonych. Natomiast wedle mojego ujęcia, pojęcie stosunku pomiędzy dwiema wielkościami tego samego rodzaju może dopiero wtedy zostać jasno opracowane, gdy liczby niewymierne zostały już wprowadzone.

Jak już powiedziano, sądzę, iż się nie mylę przyjmując, że każdy uzna natychmiast prawdziwość tego stwierdzenia; większość moich czytelników będzie bardzo rozczarowana dowiadując się, że tak trywialnie można odsłonić tajemnicę ciągłości. Skwituję to następująco. Jestem wielce rad, jeśli każdy znajduje powyższą zasadę tak oczywistą i zgodną z jego wyobrażeniami linii prostej; ani nie jestem bowiem w stanie podać jakiegokolwiek innego dowodu jej poprawności, ani nikt nie może tego zrobić. Przyjęcie tej własności linii prostej jest niczym innym jak aksjomatem, na mocy którego przyznajemy linii prostej jej ciągłość, na mocy którego wmyślamy się [hineindenken] w ciągłość linii prostej. Jeśli przestrzeń ma w ogóle jakąś realną egzystencję, to wcale *nie* musi koniecznie być ciągła; niezliczone jej własności pozostałyby takie same, gdyby była nieciągła. I gdybyśmy wiedzieli z pewnością, że przestrzeń jest nieciągła, to i tak nic nie mogłoby nas powstrzymać, gdybyśmy tego chcieli, aby w myśli uczynić ją ciągłą, poprzez wypełnienie jej luk; to wypełnienie polegałoby jednak na tworzeniu nowych indywiduów punktowych i musiałoby zostać przeprowadzone wedle powyższej zasady.

§4. Stworzenie liczb niewymiernych

Na mocy ostatnich uwag jest już wystarczająco jasne, w jaki sposób nieciągła dziedzina R liczb wymiernych musi zostać uzupełniona do dziedziny ciągłej. W §1 podkreślono (III), że każda liczba wymierna a dostarcza rozdzielenia systemu R na dwie klasy A_1, A_2 tego rodzaju, że każda liczba a_1 z pierwszej klasy A_1 jest mniejsza od każdej liczby a_2 z klasy drugiej A_2; liczba a jest albo największą liczbą klasy A_1, albo najmniejszą liczbą klasy A_2. Jeśli teraz dany jest jakikolwiek podział systemu R na dwie klasy A_1, A_2, który ma tylko *tę* własność charakterystyczną, że każda liczba a_1 w A_1 jest mniejsza od każdej liczby a_2 w A_2, to dla zwięzłości będziemy nazywać taki podział *przekrojem* i oznaczać przez (A_1, A_2). Możemy wtedy powiedzieć, że każda liczba wymierna a wytwarza [hervorbringt] przekrój, lub właściwie dwa przekroje, których jednak nie chcemy uważać za istotnie różne; przekrój ten ma *ponadto* tę własność, że albo wśród liczb pierwszej klasy istnieje liczba największa, albo wśród liczb klasy drugiej istnieje liczba najmniejsza. I na odwrót, jeśli jakiś przekrój ma tę własność, to będzie on wyznaczony przez ową największą lub najmniejszą liczbę wymierną.

Łatwo się jednak przekonać, że istnieje też nieskończenie wiele przekrojów, które nie są wytworzone przez żadną liczbę wymierną. Nasuwający się przykład jest następujący.

Niech D będzie dodatnią liczbą całkowitą, lecz nie kwadratem liczby całkowitej. Wtedy istnieje dodatnia liczba całkowita λ tego rodzaju, że zachodzi:

$$\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2.$$

Jeśli przyjmiemy do klasy drugiej A_2 każdą dodatnią liczbę wymierną a_2, której kwadrat jest $> D$, a do pierwszej klasy A_1 wszystkie pozostałe liczby wymierne a_1, to podział ten tworzy przekrój, tj. każda liczba a_1 jest mniejsza od każdej liczby a_2. Jeśli mianowicie $a_1 = 0$ lub jest ujemna, to a_1 już z tego powodu jest mniejsza od każdej liczby a_2, gdyż ta ostatnia na mocy definicji jest dodatnia; jeśli jednak

a_1 jest dodatnia, to jej kwadrat jest $\leqslant D$, a w konsekwencji a_1 jest mniejsza od każdej liczby dodatniej, której kwadrat jest $> D$.

Ten przekrój nie jest jednak wytworzony przez żadną liczbę wymierną. Aby tego dowieść, trzeba przede wszystkim udowodnić, że nie istnieje liczba wymierna, której kwadrat $= D$. Chociaż jest to fakt znany z elementarnej teorii liczb, to jednak następujący dowód nie wprost wydaje się na miejscu. Jeśli istnieje liczba wymierna, której kwadrat $= D$, to istnieją też dwie dodatnie liczby całkowite t, u, spełniające równanie

$$t^2 - Du^2 = 0$$

i można założyć, że u jest *najmniejszą* dodatnią liczbą całkowitą o tej własności, że jej kwadrat przemnożony przez D przeobraża się na kwadrat liczby całkowitej t. Ponieważ oczywiście

$$\lambda u < t < (\lambda + 1)u,$$

więc liczba

$$u' = t - \lambda u$$

jest dodatnią liczbą całkowitą, w dodatku *mniejszą* od u. Jeśli przyjmiemy dalej

$$t' = Du - \lambda t,$$

to t' również będzie dodatnią liczbą całkowitą i otrzymujemy

$$t'^2 - Du'^2 = (\lambda^2 - D)(t^2 - Du^2) = 0,$$

co stoi w sprzeczności z założeniem o u.

Tak więc, kwadrat każdej liczby wymiernej x jest albo $< D$, albo $> D$. Łatwo z tego wynika, że ani w klasie A_1 nie istnieje liczba największa, ani w klasie A_2 nie istnieje liczba najmniejsza. Jeśli bowiem przyjmiemy

$$y = \frac{x(x^2 + 3D)}{3x^2 + D},$$

to mamy

$$y - x = \frac{2x(D - x^2)}{3x^2 + D}$$

oraz

$$y^2 - D = \frac{(x^2 - D)^3}{(3x^2 + D)^2}.$$

Jeśli weźmiemy tu za x liczbę dodatnią z klasy A_1, to mamy $x^2 < D$, a w konsekwencji $y > x$ oraz $y^2 < D$, a więc y również należy do klasy A_1. Jeśli jednak przyjmiemy za x liczbę z klasy A_2, to mamy $x^2 > D$, a w konsekwencji $y < x$, $y > 0$ oraz $y^2 > D$, a więc y także należy do klasy A_2. Ten przekrój nie jest zatem wytworzony przez żadną liczbę wymierną.

W tej własności, iż nie wszystkie przekroje są wytworzone przez liczby wymierne, zasadza się niezupełność lub nieciągłość dziedziny R wszystkich liczb wymiernych.

Za każdym razem, gdy przedłożony jest przekrój (A_1, A_2), który nie jest wytworzony przez żadną liczbę wymierną, *stwarzamy* [erschaffen wir] pewną nową liczbę *niewymierną* α, którą możemy poczytywać za w pełni zdefiniowaną przez ten przekrój (A_1, A_2); będziemy mówić, że liczba α odpowiada temu przekrojowi, lub że wytwarza ten przekrój. Odtąd zatem każdemu ustalonemu przekrojowi odpowiada jedna i tylko jedna liczba wymierna lub niewymierna i uważamy dwie liczby za *różne* zawsze i tylko wtedy, gdy odpowiadają one istotnie różnym przekrojom.

Aby uzyskać teraz podstawę do uporządkowania wszystkich liczb *rzeczywistych*, tj. wszystkich liczb wymiernych oraz niewymiernych, musimy najpierw zbadać związki między jakimikolwiek dwoma przekrojami (A_1, A_2) oraz (B_1, B_2), które są wytworzone przez jakiekolwiek liczby α i β. Przekrój (A_1, A_2) jest oczywiście już w pełni określony, gdy znana jest jedna z obu klas, np. pierwsza A_1, ponieważ druga klasa A_2 złożona jest ze wszystkich liczb wymiernych nie należących do A_1 i cechą charakterystyczną takiej pierwszej klasy A_1 jest to, że jeśli należy do niej liczba a_1, to należą do niej również wszystkie liczby mniejsze od a_1. Jeśli teraz porównuje się ze sobą dwie takie pierwsze klasy A_1, B_1, to może być tak, że:

1. Są one całkowicie identyczne, tj. każda liczba a_1 należąca do A_1, należy także do B_1 oraz każda liczba b_1 należąca do B_1 należy także do A_1. W tym przypadku z konieczności również A_2 jest identyczna z B_2, oba przekroje są całkowicie identyczne, co symbolicznie zaznaczamy przez $\alpha = \beta$ lub przez $\beta = \alpha$.

Jeśli jednak obie klasy A_1, B_1 nie sa identyczne, to w jednej z nich, np. w A_1, istnieje liczba $a_1' = b_2'$, która nie należy do pozostałej B_1 i która, w konsekwencji, znajduje się w B_2; tak więc z pewnością wszystkie liczby b_1 należące do B_1 są mniejsze od tej liczby $a_1' = b_2'$, a w konsekwencji wszystkie liczby b_1 należą też do A_1.

2. Jeśli teraz ta liczba a_1' jest jedyną liczbą w A_1, która nie należy do B_1, to każda inna liczba a_1 należąca do A_1 należy do B_1 i w konsekwencji jest mniejsza od a_1', tj. a_1' jest największą wśród liczb a_1, a zatem przekrój (A_1, A_2) jest wytworzony przez liczbę wymierną $\alpha = a_1' = b_2'$. O pozostałym przekroju (B_1, B_2) wiemy już, że wszystkie liczby b_1 w B_1 należą też do A_1 oraz są mniejsze od liczby $a_1' = b_2'$, która należy do B_2; każda inna liczba b_2 należąca do B_2 musi być jednak większa od b_2', gdyż w przeciwnym przypadku byłaby też mniejsza od a_1', a więc należałaby do A_1 i w konsekwencji także do B_1; tak więc, b_2' jest najmniejszą wśród wszystkich liczb należących do B_2, a w konsekwencji również przekrój (B_1, B_2) jest wytworzony przez tę samą liczbę wymierną $\beta = b_2' = a_1' = \alpha$. Oba przekroje są więc tylko nieistotnie różne.

3. Jeśli jednak w A_1 istnieją co najmniej dwie różne liczby $a_1' = b_2'$ oraz $a_1'' = b_2''$, które nie należą do B_1, to istnieje też takich liczb nieskończenie wiele, ponieważ wszystkie spośród nieskończenie wielu liczb leżących między a_1' oraz a_1'' (§1, II) należą oczywiście do A_1, ale nie do B_1. W tym przypadku nazywamy *różnymi* od siebie liczby α i β, odpowiadające tym dwóm istotnie różnym przekrojom (A_1, A_2) oraz (B_1, B_2), a mianowicie mówimy, że α jest *większa* od β, że β jest *mniejsza* od α, co symbolicznie wyrażamy przez zarówno $\alpha > \beta$, jak i przez $\beta < \alpha$. Należy przy tym podkreślić, że ta definicja jest w pełni zgodna z wcześniejszą, gdy obie liczby α, β są wymierne.

Pozostałe możliwe przypadki są takie.

4. Jeśli w B_1 istnieje jedna i tylko jedna liczba $b_1' = a_2'$, która nie należy do A_1,

to oba przekroje (A_1, A_2) oraz (B_1, B_2) różnią się tylko nieistotnie i są wytworzone przez jedną i tę samą liczbę wymierną $\alpha = a'_2 = b'_1 = \beta$.

5. Jeśli jednak w B_1 są co najmniej dwie różne liczby, które nie należą do A_1, to mamy $\beta > \alpha$, $\alpha < \beta$.

Jako iż wszystkie przypadki zostały wyczerpane, wynika z tego, że z dwóch różnych liczb jedna koniecznie musi być większa, a druga mniejsza, co daje dwie możliwości. Trzeci przypadek jest niemożliwy. Mieściło się to już w wyborze *komparatywu* (większy, mniejszy) na oznaczenie związku między α, β; ale wybór ten dopiero teraz, po fakcie, jest uzasadniony. Właśnie przy takich badaniach trzeba się z najwyższą troską strzec, aby – choćby z najlepszymi chęciami dochowania rzetelności – nie dać się skłonić do dokonywania niedozwolonych przeniesień z jednej dziedziny do drugiej, przez pospieszny wybór wyrażeń, które są wypożyczone od innych rozwiniętych już wyobrażeń.

Jeśli teraz rozważymy jeszcze raz dokładnie przypadek $\alpha > \beta$, to okaże się, że mniejsza liczba β, o ile jest wymierna, z pewnością należy do klasy A_1; jeśli bowiem w A_1 istnieje liczba $a'_1 = b'_2$, która należy do klasy B_2, to liczba β, będąc czy to największą liczbą w B_1 czy też najmniejszą liczbą w B_2, z pewnością jest $\leqslant a_1$, a w konsekwencji należy A_1. Podobnie z $\alpha > \beta$ wynika, że większa liczba α, o ile jest wymierna, z pewnością należy do klasy B_2, ponieważ mamy $\alpha \geqslant a'_1$. Jeśli połączy się oba rozważania, to otrzyma się następujący wynik: Jeśli przekrój (A_1, A_2) jest wytworzony przez liczbę α, to jakakolwiek liczba wymierna należy albo do klasy A_1, albo do klasy A_2, w zależności od tego, czy jest mniejsza czy większa od α; jeśli liczba α sama jest wymierna, to może ona należeć do jednej lub drugiej klasy.

Wynika z tego w końcu co następuje. Jeśli $\alpha > \beta$, czyli istnieje też nieskończenie wiele liczb w A_1, które nie należą do B_1, to istnieje również nieskończenie wiele takich liczb, które są jednocześnie różne od α i β; każda taka liczba wymierna c jest $< \alpha$, ponieważ należy do A_1 i jest jednocześnie $> \beta$, ponieważ należy do B_2.

§5. Ciągłość dziedziny liczb rzeczywistych

Jak wynika z poczynionych wyżej rozróżnień, system $\mathfrak{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych tworzy jednowymiarową dziedzinę uporządkowaną [wohlgeordnetes]; nie da się przez to powiedzieć nic więcej, niż tylko to, że rządzą nim następujące prawa:

I. Jeśli $\alpha > \beta$ oraz $\beta > \gamma$, to również $\alpha > \gamma$. Powiemy wtedy, że liczba β leży między α i γ.

II. Jeśli α, γ są dwiema różnymi liczbami, to zawsze istnieje nieskończenie wiele różnych liczb β, które leżą między α oraz γ.

III. Jeśli α jest ustaloną liczbą, to wszystkie liczby systemu $\mathfrak{R}$ wpadają do dwóch klas $\mathfrak{A}_1$ oraz $\mathfrak{A}_2$, z których każda zawiera nieskończenie wiele indywiduów; pierwsza klasa $\mathfrak{A}_1$ obejmuje te wszystkie liczby α_1, które są $< \alpha$, druga klasa $\mathfrak{A}_2$ obejmuje te wszystkie liczby α_2, które są $> \alpha$; sama liczba α może zostać dowolnie przydzielona do pierwszej lub drugiej klasy i jest wtedy, odpowiednio, albo największą liczbą w pierwszej, albo najmniejszą liczbą w drugiej klasie. W każdym przypadku rozkład systemu $\mathfrak{R}$ na obie klasy $\mathfrak{A}_1$ oraz $\mathfrak{A}_2$ jest tego rodzaju, że każda liczba pierwszej klasy $\mathfrak{A}_1$ jest mniejsza od każdej liczby drugiej klasy $\mathfrak{A}_2$ i mówimy, że podział ten jest wytworzony przez liczbę α.

Dla zwięzłości oraz po to, aby nie nudzić czytelnika pomijam dowody tych twierdzeń, które wynikają bezpośrednio z definicji poprzedniego paragrafu.

Poza tymi własnościami, dziedzina $\mathfrak{R}$ posiada też *ciągłość*, tj. zachodzi następujące twierdzenie:

IV. Jeśli system $\mathfrak{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych rozpada się na dwie klasy $\mathfrak{A}_1$ oraz $\mathfrak{A}_2$ tego rodzaju, że każda liczba α_1 klasy $\mathfrak{A}_1$ jest mniejsza od każdej liczby α_2 klasy $\mathfrak{A}_2$, to istnieje jedna i tylko jedna liczba α, przez którą ten rozkład jest wytworzony.

Dowód. Rozkład lub podział systemu $\mathfrak{R}$ na klasy $\mathfrak{A}_1$ oraz $\mathfrak{A}_2$ daje jednocześnie przekrój (A_1, A_2) systemu R wszystkich liczb wymiernych, który zdefiniowany jest przez to, że A_1 zawiera wszystkie liczby wymierne z klasy $\mathfrak{A}_1$, a A_2 zawiera wszystkie pozostałe liczby wymierne, tj. wszystkie liczby wymierne z klasy $\mathfrak{A}_2$. Niech α będzie w pełni określoną liczbą, która wytwarza ten przekrój (A_1, A_2). Jeśli teraz β jest jakąkolwiek liczbą różną od α, to zawsze istnieje nieskończenie wiele liczb wymiernych c, które leżą między α oraz β. Jeśli $\beta < \alpha$, to $c < \alpha$; stąd c należy do klasy A_1, a w konsekwencji do klasy $\mathfrak{A}_1$, a ponieważ jednocześnie $\beta < c$, więc β należy do tej samej klasy $\mathfrak{A}_1$, gdyż każda liczba w $\mathfrak{A}_2$ jest większa od każdej liczby c w $\mathfrak{A}_1$. Jeśli jednak $\beta > \alpha$, to $c > \alpha$; stąd c należy do klasy A_2, a w konsekwencji do klasy $\mathfrak{A}_2$, ponieważ każda liczba w $\mathfrak{A}_1$ jest mniejsza od każdej liczby c w $\mathfrak{A}_2$. A zatem każda liczba β różna od α należy do klasy $\mathfrak{A}_1$ lub do klasy $\mathfrak{A}_2$, w zależności od tego, czy $\beta < \alpha$ czy też $\beta > \alpha$; w konsekwencji sama α jest albo największą liczbą w $\mathfrak{A}_1$ lub najmniejszą liczbą w $\mathfrak{A}_2$, tj. α jest jedną i oczywiście jedyną liczbą, przez którą wytworzony jest rozkład $\mathfrak{R}$ na klasy $\mathfrak{A}_1$ oraz $\mathfrak{A}_2$, co należało wykazać.

§6. Rachowanie na liczbach rzeczywistych

Aby sprowadzić rachowanie na dwóch liczbach rzeczywistych α, β do rachowania na liczbach wymiernych trzeba tylko zdefiniować przez przekroje (A_1, A_2) oraz (B_1, B_2), które są wytworzone przez liczby α i β w systemie $\mathfrak{R}$, przekrój (C_1, C_2), który ma odpowiadać wynikowi rachowania γ. Ograniczę się tu do omówienia najprostszego przykładu, czyli dodawania.

Jeśli c jest jakąkolwiek liczbą wymierną, to włączamy ją do klasy C_1, gdy istnieje liczba a_1 w A_1 oraz liczba b_1 w B_1 tego rodzaju, że ich suma $a_1 + b_1 \geqslant c$; wszystkie pozostałe liczby wymierne włączamy do klasy C_2. Ten podział wszystkich liczb wymiernych na obie klasy C_1, C_2 tworzy oczywiście przekrój, ponieważ każda liczba c_1 w C_1 jest mniejsza od każdej liczby c_2 w C_2. Jeśli teraz obie liczby α, β są wymierne, to dla każdej liczby c_1 należącej do C_1 mamy $c_1 \leqslant a_1 + b_1$, gdyż $a_1 \leqslant \alpha$, $b_1 \leqslant \beta$, a więc także $a_1 + b_1 \leqslant \alpha + \beta$; dalej, gdyby do C_2 należała liczba

$c_2 < \alpha + \beta$, czyli $\alpha + \beta = c_2 + p$, gdzie p oznacza całkowitą liczbę wymierną, to mielibyśmy

$$c_2 = (\alpha - \frac{1}{2}p) + (\beta - \frac{1}{2}p),$$

co stoi w sprzeczności z definicją liczby c_2, ponieważ $\alpha - \frac{1}{2}p$ jest liczbą w A_1, a $\beta - \frac{1}{2}p$ jest liczbą w B_1; w konsekwencji, dla każdej liczby c_2 w C_2 mamy $c_2 \geqslant \alpha + \beta$. Tak więc, w tym przypadku przekrój (C_1, C_2) jest wytworzony przez sumę $\alpha + \beta$. Nie narusza się przy tym definicji obowiązującej w arytmetyce liczb wymiernych, gdy we wszystkich przypadkach przez *sumę* $\alpha + \beta$ dowolnych dwóch liczb rzeczywistych α, β rozumie się tę liczbę γ, przez którą wytworzony jest przekrój (C_1, C_2). Jeśli, dalej, tylko jedna z obu liczb α, β, np. α jest wymierna, to łatwo się przekonać, że nie ma wpływu na sumę $\gamma = \alpha + \beta$ to, czy przyjmie się liczbę α do klasy A_1 czy też do klasy A_2.

Podobnie jak dodawanie można zdefiniować także pozostałe zwykłe operacje tak zwanej arytmetyki elementarnej, a mianowicie tworzenie różnic, iloczynów, ułamków, potęg, pierwiastków, logarytmów i dochodzi się w ten sposób do poprawnych [wirklichen] dowodów twierdzeń (jak np. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$), które, o ile mi wiadomo, dotąd nigdy nie były udowodnione. Znaczne rozwlekłości, których można się obawiać przy definicjach bardziej złożonych operacji leżą po części w naturze rzeczy, ale są w większej części do uniknięcia. W związku z tym wielce użyteczne jest pojęcie *przedziału*, tj. pewnego systemu A liczb wymiernych, który posiada następującą charakterystyczną własność: jeśli a oraz a' są liczbami systemu A, to również wszystkie liczby wymierne leżące między a i a' należą do A. System R wszystkich liczb wymiernych, jak również obie klasy każdego przekroju są przedziałami. Jeśli jednak istnieje liczba wymierna a_1, która jest mniejsza od wszystkich liczb przedziału A oraz liczba wymierna a_2, która jest od wszystkich tych liczb większa, to A nazwiemy przedziałem skończonym; istnieje wtedy oczywiście nieskończenie wiele liczb o tej samej własności co a_1 oraz nieskończenie wiele liczb o tej samej własności co a_2; cała dziedzina $\mathfrak{R}$ rozpada się na trzy kawałki, A_1, A, A_2 i pojawiają się dwie w pełni określone liczby wymierne lub niewymierne α_1, α_2, które mogą zostać nazwane, odpowiednio, dolną i górną (lub mniejszą i większą) *granicą* przedziału A; dolna granica α_1 jest określona przez ten przekrój, w którym klasa pierwsza jest utworzona przez system A_1, a górna granica przez ten przekrój, w którym A_2 tworzy drugą klasę. O każdej liczbie wymiernej lub niewymiernej, która leży między α_1 i α_2 można mówić, że leży ona *wewnątrz* przedziału A. Jeśli wszystkie liczby przedziału A są też liczbami przedziału B, to A nazywa się kawałkiem B.

Wydaje się, że pojawią się o wiele większe rozwlekłości, gdy chcemy przejść do tego, aby przenieść na dowolne liczby rzeczywiste niezliczone twierdzenia arytmetyki liczb wymiernych (jak np. twierdzenie $(a + b)c = ac + bc$). Tak jednak nie jest. Łatwo się przekonać, że wszystko tu sprowadza się do tego, aby udowodnić, że same operacje arytmetyczne posiadają pewną ciągłość. Co przez to rozumiem, chciałbym wyrazić w postaci ogólnego twierdzenia:

„Jeśli liczba λ jest wynikiem rachunku na liczbach $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ oraz λ leży wewnątrz przedziału L, to można podać przedziały $A, B, C, \ldots$, w których leżą, odpowiednio, liczby $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, tego rodzaju, że wynik tego samego rachunku, w którym zamienimy liczby $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ na dowolne liczby z przedziałów, odpowiednio, $A, B, C, \ldots$ będzie zawsze liczbą leżącą wewnątrz przedziału L”.

Odstraszająca ociężałość związana z wyrażeniem takiego twierdzenia przekonuje nas, że trzeba coś uczynić, aby dopomóc językowi; w istocie, osiągnięte to być może w sposób najdoskonalszy, gdy wprowadzi się pojęcia *zmiennych wielkości*, *funkcji*, *wartości granicznej* i przy tym najbardziej celowe będzie oprzeć definicje nawet najprostszych operacji arytmetycznych na tych pojęciach; co jednak tutaj nie może być dalej rozwijane.

§7. Analiza infinitezymalna

Należy tu na koniec objaśnić związek między naszymi dotychczasowymi rozważaniami a pewnymi głównymi twierdzeniami analizy infinitezymalnej.

Mówi się, że wartość zmienna x, która przebiega kolejne określone wartości liczbowe zbliża się do ustalonej *wartości granicznej* α, gdy x w przebiegu tego procesu ostatecznie znajdzie się między każdymi dwiema liczbami, między którymi leży sama α, lub, co jest tym samym, gdy wartość bezwzględna różnicy $x-\alpha$ staje się ostatecznie mniejsza od każdej danej, różnej od zera wartości.

Jedno z najważniejszych twierdzeń brzmi następująco: „Jeśli wielkość x rośnie stale, ale nie ponad wszelkie granice, to zbliża się ona do wartości granicznej”.

Dowodzę tego twierdzenia w sposób następujący. Na mocy założenia istnieje jedna, a w konsekwencji także nieskończenie wiele liczb α_2 tego rodzaju, że stale pozostaje $x < \alpha_2$; oznaczam przez $\mathfrak{A}_2$ system wszystkich tych liczb α_2, a przez $\mathfrak{A}_1$ system wszystkich pozostałych liczb α_1; każda z tych ostatnich ma tę własność, że w przebiegu tego procesu ostatecznie będzie $x \geqslant \alpha_1$, a zatem każda liczba α_1 jest mniejsza od każdej liczby α_2, a w konsekwencji istnieje liczba α, która albo jest największa w $\mathfrak{A}_1$, albo najmniejsza w $\mathfrak{A}_2$ (§5, IV). To pierwsze nie może mieć miejsca, gdyż x nie przestaje rosnąć, a więc α_2 jest liczbą najmniejszą w $\mathfrak{A}_2$. Jakąkolwiek teraz weźmiemy liczbę α_1, to zawsze będzie ostatecznie $\alpha_1 < x < \alpha$, tj. x zbliża się do wartości granicznej α.

Twierdzenie to jest równoważne z zasadą ciągłości, tj. traci ono swoją moc obowiązującą [Gültigkeit], gdy uznamy, że choćby tylko jedna liczba rzeczywista nie znajduje się w dziedzinie $\mathfrak{R}$; lub inaczej mówiąc: jeśli to twierdzenie jest prawdziwe, to także twierdzenie IV w §5 jest prawdziwe.

Inne twierdzenie analizy infinitezymalnej, także równoważne z tą zasadą, a które jeszcze częściej jest stosowane, brzmi następująco: „Jeśli w procesie zmiany wielkości x można dla każdej podanej wielkości dodatniej δ wyznaczyć też odpowiednie miejsce, począwszy od którego x zmienia się o mniej niż δ, to x zbliża się do wartości granicznej”.

Odwrócenie łatwego w dowodzie twierdzenia, że każda wielkość zmienna, która zbliża się do wartości granicznej, zmienia się w końcu mniej od jakiejkolwiek danej wielkości dodatniej, daje się równie dobrze wywieść z poprzedniego twierdzenia, jak i bezpośrednio z zasady ciągłości. Proponuję tę ostatnią drogę. Niech δ będzie dowolną wielkością dodatnią (tj. $\delta > 0$), wtedy na mocy założenia nadejdzie moment, od którego x zmienia się o mniej niż δ, tj. jeśli x w tym momencie ma wartość a, to później będzie zawsze $x > a - \delta$ oraz $x < a + \delta$. Odkładam na razie na bok pierwotne założenie i trzymam się wyżej udowodnionego faktu, że wszystkie późniejsze wartości zmiennej x leżą między dwiema danymi skończonymi wartościami. Na tym opieram podwójny podział wszystkich liczb rzeczywistych. Przyjmuję liczbę α_2 (np. $a + \delta$) do systemu $\mathfrak{A}_2$, gdy w przebiegu rozważanego procesu będzie ostatecznie $x \leqslant \alpha_2$; do systemu $\mathfrak{A}_1$ przyjmuję każdą liczbę, która nie należy do $\mathfrak{A}_2$; jeśli α_1 jest taką liczbą, to jakkolwiek daleko będzie ów proces postępował, jeszcze nieskończenie wiele razy będzie tak, iż $x > \alpha_1$. Ponieważ każda liczba α_1 jest mniejsza od każdej liczby α_2, więc istnieje w pełni określona liczba α, która wytwarza ten przekrój $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2)$ systemu $\mathfrak{R}$ i którą nazywam górną wartością graniczną pozostającej ciągle skończoną zmiennej x. Podobnie będzie wytworzony przez zachowanie się zmiennej x drugi przekrój $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ systemu $\mathfrak{R}$: liczba β_1 (np. $a - \delta$) zostanie przyjęta do $\mathfrak{B}_1$, jeśli w przebiegu rozważanego procesu ostatecznie będzie $x \geqslant \beta_1$; każda inna liczba β_2, przyjęta do $\mathfrak{B}_2$ ma tę własność, że nigdy ostatecznie nie jest $x \geqslant \beta_2$, a więc jeszcze nieskończenie wiele razy będzie $x < \beta_2$; liczbę β, przez którą wytworzony jest ten przekrój nazywam dolną wartością graniczną zmiennej x. Obie liczby α, β są oczywiście scharakteryzowane także poprzez następującą własność: jeśli ε jest dowolnie małą wielkością dodatnią, to zawsze mamy ostatecznie $x < \alpha + \varepsilon$ oraz $x > \beta - \varepsilon$, ale nigdy nie mamy ostatecznie $x < \alpha - \varepsilon$ i nigdy nie mamy ostatecznie $x > \beta + \varepsilon$. Są teraz możliwe dwa przypadki. Jeśli α i β są od siebie różne, to z konieczności jest $\alpha > \beta$, ponieważ w przeciwnym razie byłoby $\alpha_2 \geqslant \beta_1$; zmienna x oscyluje i, jakkolwiek długo trwałby rozważany proces, podlega zmianom, których wielkość przekracza wartość $(\alpha - \beta) - 2\varepsilon$, gdzie ε oznacza dowolnie małą wielkość dodatnią. Pierwotne założenie, do którego teraz wracam, stoi jednak w sprzeczności z tą konsekwencją; pozostaje zatem tylko drugi przypadek $\alpha = \beta$, a ponieważ już dowiedziono, że, jakakolwiek mała byłaby wielkość dodatnia ε, to zawsze będzie ostatecznie $x < \alpha + \varepsilon$ oraz $x > \beta - \varepsilon$, więc x zbliża się do wartości granicznej α, czego należało dowieść.

Przykłady te niech wystarczą do ukazania związku między zasadą ciągłości a analizą infinitezymalną.

* * *

Podstawa przekładu: Richard Dedekind *Stetigkeit und Irrationale Zahlen.* Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig 1872.

* * *

Tłumaczenie: Jerzy Pogonowski

Przypis tłumacza. Tłumaczenia tej rozprawy Dedekinda dokonałem we wrześniu 2010 roku. Porównałem później swój przekład z tłumaczeniem dokonanym wcześniej przez Romana Murawskiego i zamieszczonym w jego pracy *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2003 (wydanie III poprawione) na stronach 152–167. Porównanie to przekonało mnie, że w wielu miejscach przekład Romana Murawskiego jest bardziej trafny, poddałem zatem stosownym korektom mój pierwotny przekład. Jeśli zawiera on w obecnej postaci jeszcze jakieś niedokładności, to w żadnym przypadku nie należy tego wiązać z przekładem Romana Murawskiego, natomiast całkowicie odpowiada za to piszący te słowa.

Nie miałem możliwości dotarcia do jeszcze wcześniejszego przekładu rozprawy Dedekinda na język polski, a mianowicie tłumaczenia autorstwa Stanisława Straszewicza, opublikowanego w 1914 roku w Warszawie w wydawnictwie Gebethner i Wolff, które wyszło także w *Bibliotece Wektora*, seria A, nr 2, 1914. O ile mi wiadomo, Roman Murawski również nie korzystał z tego tłumaczenia.

Zakład Logiki i Kognitywistyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza
Instytut Psychologii
ul. Szamarzewskiego 89a (bud. AB)
PL-60-568 Poznań
e-mail pogon@amu.edu.pl